Math. P.
251
R

Math. P. 251.

Mathesis. Algebra specialis.

237.

<36611806370010

<36611806370010

Bayer. Staatsbibliothek

Das

Uflackerische Exempelbuch

der

Algebra

zu Wiederherstellung der durch den mechanischen Calcul verdrängten

räsonnirenden Rechenkunst.

R

Für die Bildung denkender Köpfe als ein Probestück im Geiste der Alten bearbeitet

von

C. F. Kausler,

Königlich Wirtembergischen Hofrath, und pensionirtem wirkl. Mitglied der Russisch-Kaiserlichen Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg rc.

Bayerische Staatsbibliothek München

Heidelberg und Mannheim,
bei Schwan und Götz.
1806.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Die Veranlassung dieser Auflösungen ist folgende:

Seit mehreren Jahren arbeitete ich für die Russisch-Kaiserliche Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg Diophants unsterbliches Werk über die Arithmetik aus, und fand darin einen solchen Schatz von den feinsten, scharfsinnigsten algebraischen Auflösungen, daß mir die mechanische, geistlose Methode der neuen Algebra mit jedem Tage mehr ekelte. Die erhabenste der Wissenschaften, ganz dazu geeignet, dem menschlichen Geiste die höchste Ausbildung zu geben, war zu einem Kinderspielwerk herabgesunken, dessen man sich bediente, um nach Taschenspieler-Art und Weise Resultate hervor zu zaubern, über die der Rechner selbst erstaunte: indem er unvermuthet zu einem Ziele kam, das er nicht voraussah, und auf Wegen dahin gelangte, von denen ihm keine Erinnerung blieb. Gleichsam

aus einem magischen Topfe holte er seine Auflösungen durch Untereinanderwerfung der bekannten und unbekannten Größen heraus, und dieß auf eine für seinen Geist so unrühmliche Art, daß, wenn er in der Mitte seiner Arbeit absetzte, ein Anderer, ohne zu wissen, wovon die Rede sey, dieselbe eben so gut, als er, vollenden konnte, wenn ihm nur die mechanischen Vorschriften im allgemeinen bekannt waren. Ganz anders verhält es sich mit der Rechenkunst der Aelteren. Hier ist alles Schluß und fein angelegter Plan. Nicht ein Schritt geschiehet, dessen man sich nicht vollkommen bewußt ist. Das Ziel, dem man entgegen geht, verliert sich keinen Augenblick aus dem Gesichte, und sowohl der zurückgelegte, als der noch zu machende Weg liegen sonnenklar vor Augen. Das Rechnen mit Zeichen ist nur Nebensache: nur letztes Mittel, das Gesuchte zu erreichen. Wird die Algebra auf diese Art behandelt, so kann sie ihrer erhabenen Schwester, der Geometrie, kühn an die Seite gesetzt werden, und sie wird mit ihr das schönste, vortreflichste Werkzeug zu Erweckung und Bildung der edelsten Seelenkräfte. Ich habe noch keinen jungen Menschen von Kopf gekannt, der nicht an Auflösungen, dergleichen die 1, 13, 16, 17, 42, 43 u. s. w. sind, die

größte Freude gehabt hätte. Aber ich habe sehr viel junge Leute gelehrt, die bei höchst mittelmäßigen Gaben eben diese Aufgaben mechanisch ganz gut aufzulösen wußten, und die viele Schwierigkeiten fanden, jene Auflösungen durch Räsonnement gehörig zu fassen, und, was noch mehr ist, in der Ordnung herzusagen. Die Sache ist ganz natürlich. Bei der Auflösung durch Räsonnement ist man sich ganz selbst überlassen, und muß jeden Schritt überdenken: bei der Auflösung durch bloses Rechnen haben die Gedanken nichts mehr zu thun, so bald einmal die Gleichungen angesetzt sind. Das übrige sind mechanische Operationen. Was ist sodann der Unterschied nach vollendeter Auflösung? nach der ersteren hat der junge Mensch den vollständigsten lichtvollsten Begriff von dem, was er gesucht und erhalten hat; nach der leztern glaubt er zwar an die Richtigkeit dessen, was er fand; aber es kommt ihm sonderbar vor, daß er die unbekannte Größe gefunden; er siehet sich selbst als einen kleinen Zauberer an, denn alles, was er that, bleibt ihm dunkel und räthselhaft. Je mehr ich nun von dem unverkennbaren Nutzen einer räsonnirenden Algebra überzeugt war, desto lebhafter mußte der Wunsch werden, die vortrefliche Methode der Alten, der die Franzosen

ihre feinsten Köpfe verdanken, weil sogar ihre gemeine Rechenkunst in diesem Geiste gelehrt wird, an vielen Beispielen anschaulich zu machen. Nichts wäre leichter gewesen, als eine eigene Sammlung der schönsten Aufgaben zu diesem Ende zu machen, und besonders dieselben so zu ordnen, daß sie von der leichteren zur schwerern eine aneinanderhängende Kette bildeten. Ich hielt es aber dem gegenwärtigen Zwecke für angemessener, die so sehr bekannte, bei öffentlichen und Privat-Vorlesungen gebrauchte Uflackerische Sammlung zum Grund zu legen, weil gerade diese die Veranlassung zu den fehlerhaften oder vielmehr geistlosen Auflösungen der Neueren wird, und dieselben von dem Lehrer auf den Schüler fortpflanzt. Viele Aufgaben dieser Sammlung gehören, wie ich deutlich gezeigt habe, gar nicht in die Algebra, und können von einem denkenden Kopfe sehr leicht durch Hülfe der gewöhnlichen Rechenkunst aufgelöset werden. Die übrigen sind gar nicht geordnet und gehören zum Theil nicht in das Kapitel, in dem sie stehen. Den Aufgaben vom dritten und höheren Graden gebe ich eine geringere Wichtigkeit, und habe mich, da sie überdieß auch selten vorkommen, nicht bei denselben aufgehalten. Dieß leztere gilt auch von den unbe-

stimmten Aufgaben, deren öfters weitläufige Auflösung das Werkchen unverhältnißmäßig vergrößert hätte. Ueberhaupt muß ich hier anmerken, daß ich dieß alles nur als ein geringes Probestück ausarbeiten wollte, um auf die so lehrreiche Methode der Alten aufmerksam zu machen, und daß ich, wenn meine Verhältnisse es erlauben, ein vollständiges algebraisches Werk in diesem Geiste, zu Erweckung und Bildung des mathematischen Scharfsinns, zu verfassen gedenke.

Soll nun aber die hier gezeigte Auflösungsmethode bei der Jugend von Nutzen seyn: so beobachte man Folgendes:

1) Da das Denken die Hauptsache bei algebraischen Auflösungen ist; das Rechnen aber nur Nebensache: so sehe man nicht sowohl auf das Resultat, als auf die Art, wie es herbei geführt wurde.

2) Zu dem Ende lasse man den Zögling jede Auflösung, nach Art der geometrischen Beweise, in systematischer Ordnung, und mit so wenig Worten als möglich, aber mit aller Deutlichkeit, welche die Natur der Sache erfordert, hersagen.

3) Man mache ihn auf die feinen Wendungen, die bei den verschiedenen Auflösungen vorkommen, aufmerksam, und zeige ihm, wie andere Wege, die man genommen hätte, der Natur der Aufgabe weniger angemessen, auch weniger kurz, weniger sinnreich, und auf Kosten des Nachdenkens gewesen wären. Lassen sich also hie und da noch feinere Auflösungen geben, als diejenigen, die ich hier mittheile, so merke man dieß an, und belehre ihn durch Vergleichung.

4) Um zu erfahren, ob das, was man lehrte, wohl verstanden worden sey, varire man die Aufgaben, wie ich es bei der 13ten gelegenheitlich angemerkt habe; oder wenn der Schüler schon etwas weiter gekommen, so lasse man ihn ein Beispiel in allgemeinen Zeichen auflösen, wie in der 119ten Aufgabe gezeigt worden ist.

5) Bei öfters dem Anscheine nach willkührlichen Annahmen der unbekannten Größe bemerke man, daß zur Vereinfachung der Rechnung eine solche Annahme nichts weniger als gleichgültig ist. Daß es Hypothesen giebt, welche die Rechnung sehr weitläufig machen, und

wieder andere, welche die Rechnung ungemein verkürzen. Das zweite und vierte Kapitel, wie auch viele einzelne Aufgaben der andern, liefern Belege hierzu. Daß aber diese Annahmen, die auf so einfachem Wege zum Resultate führen, ganz und gar nicht zufällig oder glücklich errathen seyen, zeigt unter andern die 63. und 64. Auflösung.

6) Auch in den Fällen, wo der mechanische Calcul nicht zu vermeiden ist, kann eine algebraische Auflösung feiner seyn, als eine andere; das heißt, weniger Rechnung erfordern, und auf eine einfachere Art zum Ziele führen. Als Beispiel führe ich nur die 119. 160. 249. Aufgabe an.

7) Wenn in einer Aufgabe mehrere unbekannte Größen vorkommen, so bezeichne man sie nicht, wie in so vielen Lehrbüchern geschiehet, ohne weiters mit x, y, z u. s. w., sondern man drücke eine durch die andere aus, da sie ja, nach den Bedingungen dieser Aufgabe, von einander wechselseitig abhängen müssen, und führe, wo möglich, nur eine einzige derselben, oder ihre Summe u. s. w. in die Rechnung ein. Das zweite Kapitel liefert in jeder Aufgabe Beispiele hierzu.

8) Da aber auch bei der zierlichsten Auflösung einer Aufgabe am Ende gerechnet werden muß: so wird vorausgesetzt, daß man die Algebra nicht anfangen könne, wenn man nicht die Arithmetik vollkommen in seiner Gewalt hat. Besonders sollen die jungen Leute die Lehre von den Brüchen wohl verstehen.

Mit diesen wenigen Bemerkungen empfehle ich dieß Werkchen zur geneigten Aufnahme.

I.

Einfache Gleichungen, worin nur eine unbekannte Größe vorkommt.

1.

Ein Bedienter soll zum Jahreslohn 30 Thaler und ein Kleid erhalten. Wenn ihm nun der Herr nach 4 Monaten seinen Abschied, und das Kleid zum Lohne mitgiebt, wie theuer hat er das Kleid gerechnet?

Auflösung:

Nach der Bedingung erhält also der Bediente nach 4 Monaten ein Kleid; mithin beträgt sein Jahreslohn den Werth von 3 Kleidern. Dieser ist aber auch 30 Thaler und 1 Kleid. Folglich sind 3 Kleider so viel werth als 30 Thaler und 1 Kleid. Also kosten 2 Kleider 30 Thaler, und demnach 1 Kleid 15 Thaler.

2.

Eine Erbschaft von 150 Thlr. soll unter zwei Personen also vertheilt werden, daß der Eine 9 Thlr. bekommt, so oft der Andere 1 Thlr. bekommt. Wie viel wird Jeder erhalten?

Auflösung:

Von je 10 Thlr., die vertheilt werden, erhält A 9 Thlr.; also von 150, oder von 15mal 10, nothwendig 15mal 9, das ist: 135 Thlr.

Ferner: von je 10 Thlr., die vertheilt werden, erhält B 1 Thlr.; also von 150, d. i. 15mal 10, erhält derselbe 15mal 1, d. i. 15 Thlr.

3.

Man verkauft von einem Stücke Tuch $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ des Stücks, und behält 20 Ellen übrig. Wie viel Ellen hat das ganze Stück gehalten?

Auflösung:

$\frac{1}{4}$ einer Sache und $\frac{1}{3}$ derselben betragen zusammen $\frac{7}{12}$ dieser Sache. Das Ganze ist $\frac{12}{12}$ derselben. Werden also $\frac{7}{12}$ eines Stück Tuchs vom ganzen Stück, d i. von $\frac{12}{12}$ dieses Stücks verkauft, so bleiben noch $\frac{5}{12}$ davon übrig. Nun ist aber dieser Überrest 20 Ellen. Also betragen $\frac{5}{12}$ des Stücks 20 Ellen; mithin $\frac{1}{12}$ desselben 4 Ellen, und daher hält das ganze Stück oder $\frac{12}{12}$ nothwendig 4mal 12 oder 48 Ellen.

4.

Wenn ich $3\frac{1}{2}$mal so viel Geld hätte, als ich habe, so hätte ich 375 Thlr. mehr als ich habe. Wie viel Thaler habe ich?

Auflösung:

$3\frac{1}{2}$mal einer Sache ist $\frac{7}{2}$ dieser Sache. Also ist $\frac{7}{2}$ des unbekannten Gelds eben so viel, als 375 Thlr. vermehrt um eben dieses Geld; d. i. $\frac{7}{2}$ des Gelds ist so viel als 375 Thlr. vermehrt um $\frac{2}{2}$ eben desselben Gelds. Daher sind $\frac{5}{2}$ des gesuchten Gelds 375 Thlr.; also auch

$\frac{1}{2}$ desselben der 5te Theil von 375 oder 75, und mithin ist das Geld selbst 2mal 75, nämlich 150 Thlr.

5.

Es hat Jemand einige Thaler angelegt, um folgende Waaren zu bezahlen. Der gekaufte Zucker kostet $\frac{1}{4}$ des angelegten Gelds, der Kaffee $\frac{1}{3}$ desselben, der Reis $\frac{1}{12}$ und der Thee $\frac{1}{6}$ dieses Gelds; die Mandeln aber $7\frac{1}{2}$ Thlr. Wie viel Thaler hat er für dieß alles angelegt?

Auflösung:

$\frac{1}{4}$ einer Sache, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{6}$ derselben betragen zusammen $\frac{10}{12}$ oder $\frac{5}{6}$ dieser Sache. Mithin kosten Zucker, Kaffee, Reis und Thee zusammen $\frac{5}{6}$ des angelegten Gelds. Der ganze Geldvorrath aber ist $\frac{6}{6}$ desselben Gelds. Daher bleiben für die Mandeln noch $\frac{1}{6}$ dieses Gelds übrig. Nun kosten diese $7\frac{1}{2}$, d. i. $\frac{15}{2}$ Thaler. Folglich ist $\frac{1}{6}$ einer gewissen Summe 15 halbe Thaler. Daher ist diese Summe selbst 6mal 15 oder 90 halbe, d. i. 45 ganze Thlr.

6.

Ein Mädchen sagte zu ihrem Vater: Ich wünschte mich verheurathet zu sehen, wenn ich nicht befürchten müßte, daß ich noch zu jung wäre. Der Vater erwiedert: Wenn man die Zahl deiner Jahre mit $9\frac{3}{4}$ vermehrt, und vom Produkt 12 abzieht, so bleiben nur 300 Jahre übrig. Wie alt war das Mädchen?

Auflösung:

$9\frac{3}{4}$ einer Sache ist $\frac{39}{4}$ derselben. Mithin sind $\frac{39}{4}$ der unbekannten Zahl der Jahre, um 12 vermindert, gleich

300 Jahren. Demnach müssen auch $\frac{39}{4}$ jener Jahre 312 seyn. Folglich betragen $\frac{1}{4}$ der unbekannten Jahre den 39sten Theil von 312, oder 8 Jahre. Ist aber $\frac{1}{4}$ einer Zahl 8, so ist diese selbst 4mal 8 oder 32. Also ist das Mädchen 32 Jahre alt.

7.

Es wollte Jemand gerne die Anzahl der Nonnen in einem Kloster wissen, und sagte zu einer von ihnen, daß ihrer wohl 50 seyn möchten; erhielt aber zur Antwort: Unserer sind nicht 50, sondern wären unserer noch so viel, halb so viel, ein Drittel so viel, ein Viertel so viel und noch 13, alsdann würden 50 herauskommen. Wie viel waren nun Nonnen im Kloster?

Auflösung:

Das Doppelte einer Sache, die Hälfte, ein Drittel und ein Viertel derselben, auf 12tel gebracht, betragen zusammen $\frac{37}{12}$ dieser Sache. Mithin sind $\frac{37}{12}$ der gesuchten Zahl, um 13 vermehrt, gleich 50; also sind auch $\frac{37}{12}$ dieser Zahl 37; folglich ist $\frac{1}{12}$ derselben gleich 1, und also diese Zahl selbst 12mal 1 oder 12.

8.

Ein Sohn erhielt von seinem Vater folgende Erklärung über sein Alter: Wenn du zu deinem Alter noch $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ addirst, und überdieß noch 9 Jahre, so kommen 100 Jahre heraus. Wie alt war er?

Auflösung:

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ auf einerlei Benennung 60 gebracht, betragen zusammen $\frac{273}{60}$ oder $\frac{91}{20}$. Folglich sind

$\frac{91}{20}$ eines gewissen Alters, mit Hinweglassung der 9 Jahre, 91 Jahre; daher ist $\frac{1}{20}$ dieses Alters 1 Jahr, und dieses Alter also 20mal 1, d. i. 20 Jahre.

9.

Zwei Freunde wollten gern noch spät in einem Wirthshause aufgenommen werden; deswegen erbot sich der erste dreifaches und der andere fünffaches Schlafgeld zu geben. Der Wirth empfieng nun 24 Groschen von beiden. Wie viel war also das festgesetzte Schlafgeld?

Auflösung:

Beide Freunde zusammen gaben 8faches Schlafgeld. Nun gaben sie miteinander 24 Gr.; folglich sind 24 Gr. 8faches Schlafgeld. Das einfache ist also der achte Theil von 24 Gr., nämlich 3 Gr.

10.

Zwei Personen wollten auf einem Markt ein Pferd kaufen. Wie sie nun um den Preis eins waren, fand sichs, daß der eine mit seinem Gelde nur den siebenten Theil, der andere gar nur den neunten Theil bezahlen konnte, und doch hatten beide 32 Thaler bei sich. Wie theuer war also das Pferd?

Auflösung:

Der $\frac{1}{7}$ Theil und der $\frac{1}{9}$ Theil des Kaufpreises betragen zusammen $\frac{16}{63}$ dieses Gelds. Mithin sind $\frac{16}{63}$ der unbekannten Summe gleich 32 Thaler; daher ist $\frac{1}{63}$ derselben 2 Thlr. und demnach diese Summe 2mal 63 oder 126 Thlr. Dieß ist der Preis des Pferds.

Anders: Da von dem unbekannten Preise des Pferds der siebente und neunte Theil genommen werden sollen; so nehme man an, derselbe Preis sey 7mal 9mal eine gewisse noch unbekannte Zahl von Thalern. Nun hat die erste Person den siebenten Theil dieser Summe bei sich, nämlich 9mal die unbekannte Zahl, und die zweite den neunten Theil jener Summe, oder 7mal die unbekannte Zahl. Da nun beide Personen 32 Thlr. bei sich haben, so muß also 9mal eine unbekannte Zahl und 7mal dieselbe Zahl, das ist 16mal die unbekannte Zahl gleich 32, und diese demnach $\frac{32}{16}$ oder 2 seyn. Das Pferd kostet also 9mal 7mal 2, d. i. 63mal 2 oder 126 Thlr.

11.

Zwei Personen hatten eine Summe Geldes zusammen verzehrt. Der eine fand, daß er von seinem Vorrath nur $\frac{1}{3}$ der Zeche zahlen konnte; hingegen hatte der andere gerade doppelt so viel Geld bei sich, als sie schuldig waren. Wie sie nun die Zeche bezahlt hatten, war ihr ganzer Vorrath noch 40 Thlr. Wie groß war die Zeche?

Auflösung:

A hatte $\frac{1}{3}$ der Zeche bei sich, und B $\frac{6}{3}$ derselben. Beide zusammen hatten also $\frac{7}{3}$ der Zeche. Zieht man hiervon die Zeche, d. i. $\frac{3}{3}$ ab, so bleiben $\frac{4}{3}$ der Zeche übrig. Nun behielten sie aber 40 Thlr. übrig. Also sind $\frac{4}{3}$ der Zeche gleich 40 Thaler; demnach ist $\frac{1}{3}$ der Zeche 10 Thaler, und daher die ganze Zeche 3mal 10, d. i. 30 Thlr.

Anders: Da B so viel Geld bei sich hatte, als 2mal die ganze Zeche betrug, so blieb ihm, wenn er diese allein auslegte, noch so viel übrig, als die Zeche war. A aber hatte $\frac{1}{3}$ derselben. Beide zusammen behielten also $\frac{4}{3}$ der Zeche übrig. Nun hatten sie aber 40 Thlr. übrig. Also machen 40 Thlr. $\frac{4}{3}$ der Zeche; mithin auch 10 Thlr. $\frac{1}{3}$ der Zeche, und diese ist also 3mal 10 oder 30 Thlr.

12.

Drei Personen sahen auf einem Tische Geld aufgezählt. A sagte: Ich habe dreimal so viel in meinem Beutel; B sagte: Ich habe viermal so viel als A; C sagte: Ich habe fünfmal so viel als B. Zusammen hatten sie 600 Thlr. Wie viel lag auf dem Tische?

Auflösung:

3mal die Summe auf dem Tische, 12mal diese Summe, und 60mal dieselbe, zusammengenommen, d. i. 75mal die Summe auf dem Tische ist 600. Also ist diese Summe selbst der 75ste Theil von 600 oder $\frac{600}{75}$, nämlich 8 Thlr.

13.

Einer hat etliche Arbeiter. Wenn er jedem 9 Gr. giebt, so behält er 32 Gr. übrig; giebt er aber jedem 11 Gr., so fehlen ihm 32 Gr. Wie viel sind es Arbeiter?

Auflösung:

Die 2 Gr., die bei der zweiten Austheilung jedem Arbeiter weiter gegeben werden, betragen im Ganzen eine Summe, die durch 2mal die Anzahl der Arbeiter

ausgedrückt werden kann. Auf der andern Seite erkennt sich diese Summe auch aus der Anzahl der Groschen, die durch die zweite Vertheilung mehr erfordert werden, als durch die erste. Diese Summe nun besteht erstlich aus den 32 übrigen Groschen der ersten Vertheilung, die durch die zweite absorbirt werden, und dann überdieß aus den noch ferner erforderlichen 32, die bei der zweiten Vertheilung fehlen; also im Ganzen aus 2mal 32 Gr. Nun war aber dieselbe auch 2mal die Zahl der Arbeiter. Daher ist 2mal die Zahl der Arbeiter gleich 2mal 32, und die Zahl derselben also 32.

Anmerkung: Zur Übung lasse man auf eben dieselbe Art ähnliche Beispiele, dergleichen folgendes ist, auflösen: Die Anzahl der Gr., die jedem Arbeiter gegeben werden, sey 9, der Überrest 25 Gr. die Anzahl der Gr., die nun jedem in der zweiten Vertheilung gegeben werden, sey 12, und nun fehlen 11 Gr. Wie viel waren Arbeiter?

14.

Jemand verspielt im ersten Spiele $\frac{1}{5}$, im andern $\frac{1}{4}$, im dritten $\frac{1}{3}$ seines Vermögens, und behält noch 32 Gr. 4 Pf. übrig. Wie groß war dieses Vermögen?

Auflösung:

$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ einer Sache, auf 60stel gebracht, sind zusammen $\frac{47}{60}$ dieser Sache. Von $\frac{60}{60}$ einer gewissen Summe Geldes verspielt also Jemand $\frac{47}{60}$ dieser Summe, und behält daher $\frac{13}{60}$ derselben übrig. Dieser Überrest ist aber

32 Gr. 4 Pf. oder 260 Pfennige. Daher sind $\frac{13}{60}$ einer gewissen Summe gleich 260 Pf. Mithin ist auch $\frac{1}{60}$ derselben gleich dem 13ten Theile von 260, d. i. gleich 20. Also ist diese Summe selbst 60mal 20 oder 1200 Pf., welche 150 Gr. oder 4 Thlr. 6 Gr. betragen.

15.

Alexander sprach zu seinen Generalen: Ich bin 2 Jahre älter, als Hephästion. Clytus sagte: Ich bin 4 Jahre älter, als ihr beide zusammen. Callystenes sezte hinzu: Mein Vater war 96 Jahre alt, und so alt als alle drei. Wie alt war Jeder?

Auflösung:

Da Alexander 2 Jahre älter als Hephästion, und Clytus 4 Jahre älter ist, als diese beide zusammen, so ist also Clytus Alter gleich 2mal dem des Hephästion und noch 6. Die Summe des Alters von Hephästion, Alexander und Clytus ist also 4mal das Alter Hephästions und 8 Jahre. Dieß ist demnach 96, daher ist 4mal das Alter Hephästions gleich 88, und dieß Alter selbst 22 Jahre.

16.

Ich gab aus einem Korbe voll Äpfel, einer Anzahl Kindern jedem 4 Stück, und behielt 44 übrig. Ich ließ mir darauf alle Äpfel zurückgeben, und gab jedem Kinde 6 Äpfel, da behielt ich 12 Stück übrig. Wie viel Äpfel hatte ich anfangs, und wie viel Kinder waren es?

Auflösung:

Bei der zweiten Vertheilung bekam jedes Kind 2 Äpfel mehr, als bei der ersten. Der dadurch verursachte stärkere Aufwand ist also so vielmal 2, als Kinder sind. Eben dieser Aufwand erkennt sich aber auch daraus, daß anfänglich 44 Äpfel übrig waren, und zulezt nur noch 12; derselbe beträgt also 44 — 12, oder 32 Äpfel. Also ist 2mal die Zahl der Kinder 32, und daher diese Zahl selbst 16.

17.

Ich theilte in einer Gesellschaft Geld aus, und gab jeder Person 6 Groschen, da fehlten mir aber 12 Gr.; darum gab ich jeder Person nur 4 Gr., und hatte nun 2 Gr. übrig. Wie viel Groschen und Personen waren da?

Auflösung:

Bei der ersten Vertheilung bekam jede Person 6 Gr.; bei der zweiten nur 4, also 2 Gr. weniger, als bei der ersten. Dadurch wurde im Ganzen eine Ersparniß gemacht, die so vielmal 2 Groschen beträgt, als Personen sind. Diese Ersparniß erkennt sich aber auch daraus, daß bei der ersten Vertheilung 12 Gr. fehlten, und bei der zweiten 2 Gr. übrig waren. Dieß giebt einen Unterschied von 14 Gr. Also ist 2mal die Anzahl der Personen 14, und diese Anzahl also 7.

18.

Eine Griechin gieng in den Tempel Jupiters, und bat, er möchte das Geld, das sie bei sich trug, verdoppeln. Er that es, und sie opferte zum Dank 2

Drachmen. Mit dem Überreste gieng sie in den Tempel des Apollo, und bat, und erhielt ein Gleiches, weßhalb sie wieder 2 Drachmen opferte. Nun zählte sie ihr Geld, und hatte gerade doppelt so viel, als anfangs. Wie viel hatte sie anfangs bei sich?

Auflösung:

Gesezt, die Griechin habe die nächste beste Zahl, z. B. 10 gehabt; so hatte sie nach einander 10, 2.10; 2.10—2; 4.10—4; 4.10—4—2, oder 4.10—6, nämlich 34. Diese Zahl sollte das doppelte von der anfänglichen Zahl 10 seyn; ist es aber nicht, weil das zufällig angenommene 10 nicht die gesezte Zahl ist. Die Frage ist also, anstatt 10 eine solche Zahl zu finden, deren 4faches, um 6 vermindert, dem doppelten dieser Zahl gleich ist. Mithin ist nothwendig 6 dem doppelten derselben gleich, und die unbekannte Zahl also die Hälfte von 6, nämlich 3. Die Griechin hatte demnach anfänglich 3 Drachmen.

19.

Ich habe so viele Thaler in der Tasche, daß wenn ich sie mit 10 multiplizire, oder 10 dazu addire, einerlei Zahl heraus kommt. Wie viel Thaler sind es?

Auflösung:

Das 10fache der unbekannten Anzahl von Thalern ist gleich eben dieser Anzahl und 10; daher ist das 9fache derselben gleich 10, und diese Anzahl selbst also gleich $\frac{10}{9}$ oder $1\frac{1}{9}$.

20.

Was mag das für eine Zahl seyn, welche eben dieselbe Größe giebt, man mag sie durch 19 multipliziren, oder 6 hinzu thun?

Auflösung:

Das 19fache der unbekannten Zahl ist also gleich der unbekannten Zahl und 6; daher ist das 18fache derselben gleich 6, also die Zahl selbst $\frac{6}{18}$ oder $\frac{1}{3}$.

21.

Nachdem zwei Schäfer eine fremde Heerde Schaafe gezählt hatten, sagte A: Ich habe nur $\frac{1}{3}$ so viel; B sagte: Ich habe nur $\frac{1}{4}$ so viel. Darauf erwiederte A: so habe ich 17 mehr als du. Wie viel waren es Schaafe?

Auflösung:

$\frac{1}{3}$ einer Sache übertrift $\frac{1}{4}$ derselben um $\frac{1}{12}$ dieser Sache; mithin ist $\frac{1}{12}$ der unbekannten Schaafe 17 Stück, und demnach diese Anzahl selbst 12mal 17 oder 204 Stück.

Anders: Die Anzahl der Schaafe muß sich, nach dem, was A und B äußern, durch 3 und 4 ohne Rest theilen lassen. Man nehme also an, dieselbe sey 12mal eine gewisse unbekannte Zahl; so hatte A 4mal diese Zahl, und B 3mal diese Zahl. Der Unterschied der Schaafe von A und B ist also 1mal dieselbe unbekannte Zahl. Eben dieser Unterschied ist aber auch 17. Also ist 17 die unbekannte Zahl. Daher waren es 12mal 17 oder 204 Schaafe; A aber hatte 4mal 17 oder 68, und B 3mal 17 oder 51 Schaafe.

22.

Vermöge eines Testamentes soll die Wittwe die Hälfte des ganzen Vermögens haben, der Bruder den dritten Theil und das übrige soll an die Kirche fallen. Nun bekam die Kirche 100 Thlr. Wie groß war also das ganze Vermögen?

Auflösung:

Die Hälfte und ein Drittel des Vermögens betragen zusammen $\frac{5}{6}$ desselben. Also ist der Überrest vom Ganzen $\frac{1}{6}$ desselben. Dieser Überrest ist aber auch 100; mithin ist $\frac{1}{6}$ des Vermögens gleich 100, und demnach das ganze Vermögen 6mal 100 oder 600 Thlr.

Anders: Damit von dem Vermögen die Hälfte und ein Drittel leicht hinweg genommen werden können, nehme man an, dasselbe sey 6mal eine gewisse Zahl; die Hälfte hiervon ist 3mal dieselbe Zahl und ein Drittel 2mal diese Zahl, mithin die Hälfte und ein Drittel zusammen sind 5mal die unbekannte Zahl. Folglich ist das Vermögen, um die Hälfte und ein Drittel vermindert, gleich 1mal der unbekannten Zahl. Dieser Überrest soll aber auch 100 seyn; mithin ist diese unbekannte Zahl 100, und demnach das ganze Vermögen 6mal 100 oder 600 Thlr.

23.

Die Glocke hat — — — geschlagen, rief der Nachtwächter aus. Wie viel hat's geschlagen, fragte ein Nachtschwärmer? Worauf jener erwiederte: die Hälfte, das Drittheil und das Viertheil der Stunden ist um 1 größer als ihre Anzahl. Wie viel hat es also geschlagen?

Auflösung:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ einer Sache, zusammen genommen, betragen $\frac{13}{12}$ derselben, oder diese Sache selbst, und noch $\frac{1}{12}$ derselben. Es übertrifft also $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ einer Sache diese Sache selbst um ihren zwölften Theil. Da nun die Hälfte, ein Drittel und ein Viertel der geschlagenen Stunden diese selbst um 1 übertreffen, so muß also 1 der zwölfte Theil der geschlagenen Stunden seyn. Folglich hat es 12mal 1, das ist 12 Uhr geschlagen.

Anders: Die Zahl der Stunden, die die Glocke schlug, muß sich durch 2, 3 und 4 theilen lassen, und kann also ihrer Natur nach keine andere als 12 seyn. Um jedoch dieß deutlich zu zeigen, nehme man an, sie sey 12mal eine gewisse Zahl; so ist die Hälfte derselben 6mal die unbekannte Zahl, ein Drittel derselben 4mal diese Zahl, und ein Viertel derselben 3mal eben dieselbe Zahl. Mithin sind die Hälfte, ein Drittel und ein Viertel derselben zusammen 13mal die unbekannte Zahl. Da nun die Anzahl der Stunden 12mal diese unbekannte Zahl angenommen wurde, so übertrifft also die Hälfte, das Drittel und Viertel der angenommenen Stunden diese Stunden um die unbekannte Zahl selbst. Nun übertrifft aber die Hälfte, das Drittel und das Viertel der geschlagenen Stunden diese Stunden um 1; mithin ist die unbekannte Zahl 1, und demnach die Anzahl der geschlagenen Stunden 12mal 1 oder 12.

24.

In dem einen Beutel habe ich $\frac{1}{4}$ meines Gelds; in dem zweiten $\frac{3}{8}$ desselben; in beiden zusammen 100 Thlr.

was im dritten ist, weiß ich nicht. Wie viel Thaler sind in allen drei Beuteln?

Auflösung:

Im ersten und zweiten Beutel zusammen ist $\frac{5}{8}$ des gesammten Geldes. Nun sind in denselben 100 Thaler. Mithin ist $\frac{5}{8}$ des unbekannten Geldes 100 Thlr.; also $\frac{1}{8}$ desselben 20 Thlr., und demnach ist dieses Geld selbst 8mal 20 oder 160 Thlr. Da nun in den beiden ersten Beuteln 100 Thaler davon enthalten sind, so müssen sich im dritten 60 befinden.

25.

Ein Officier schreibt: Die Hälfte meines Commandos ist gefangen, der vierte Theil auf dem Platz geblieben, und der siebente Theil hart verwundet, folglich habe ich nur noch 3 Mann bei mir. Wie stark war sein Commando?

Auflösung:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ einer Zahl betragen zusammen, auf einerlei Nenner (28) gebracht, $\frac{25}{28}$ dieser Zahl. Also bleiben vom Ganzen, d. i. von $\frac{28}{28}$ derselben noch $\frac{3}{28}$ dieser Zahl übrig. Folglich sind $\frac{3}{28}$ der unbekannten Mannschaft gleich 3; daher ist $\frac{1}{28}$ derselben gleich 1, und also diese Mannschaft selbst 28mal 1, das ist 28 Mann.

Anders: Die Anzahl dieser Mannschaft muß eine solche Zahl seyn, die durch 2, 4, 7 ohne Rest theilbar ist; also entweder 28, oder 28mal 2, oder 28mal 3 u. s. w. Sie sey also 28mal eine gewisse unbekannte Zahl. Demnach ist die Hälfte 14mal diese Zahl; der

vierte Theil 7mal diese Zahl, und der siebente Theil 4mal dieselbe; also die Summe der Hälfte, des vierten und siebenten Theiles der Mannschaft 25mal die unbekannte Zahl. Der Überrest ist also 3mal diese Zahl. Dieser Überrest ist aber auch gleich 3. Daher muß 3mal die unbekannte Zahl gleich 3, und mithin diese selbst 1 seyn. Folglich ist die Anzahl der Mannschaft 28mal 1, d. i. 28.

26.

Es hatte einer mit 3 Personen gewettet; mit A $\frac{1}{3}$, mit B $\frac{1}{4}$, mit C $\frac{1}{8}$ seines Vermögens. Nachdem er die beiden ersten Wetten verloren, und die lezte gewonnen, hatte er überhaupt 11 Groschen verloren. Was war sein Vermögen?

Auflösung:

$\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ einer gewissen Summe, auf den Nenner 24 gebracht, sind zusammen $\frac{14}{24}$ dieser Summe, und $\frac{1}{8}$ derselben ist $\frac{3}{24}$ eben dieser Summe. Diese leztere wurde gewonnen, jene verloren. Also ist der Überschuß des Verlustes über den Gewinn $\frac{11}{24}$ der unbekannten Summe Da nun überhaupt 11 Groschen verloren wurden, so ist $\frac{11}{24}$ dieser Summe gleich 11 Gr.; mithin $\frac{1}{24}$ derselben 1 Gr., und also die unbekannte Summe selbst 1mal 24 oder 24 Groschen.

27.

Eine Gesellschaft besteht halb aus Theologen, $\frac{1}{5}$ aus Juristen, und aus 15 Damen. Wie stark ist diese Gesellschaft?

Auflösung:

Die Hälfte und $\frac{1}{5}$ der Gesellschaft betragen zusammen $\frac{7}{10}$ des Ganzen. Dieses besteht aber aus $\frac{10}{10}$; daher bleiben $\frac{3}{10}$ des Ganzen für die übrigen Personen, nämlich für 15 Damen. Folglich beträgt $\frac{1}{10}$ des Ganzen 5 Damen oder 5 Personen, und daher das Ganze selbst 5.10, d. i. 50 Personen.

28.

Wenn ich von meinem Gelde die Hälfte, ein Drittheil, und ein Viertheil verschenken wollte, so würden mir 8 Thlr. fehlen. Wie viel Geld habe ich?

Auflösung:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ einer Sache ist so viel als $\frac{13}{12}$ derselben. Die Sache selbst aber ist $\frac{12}{12}$ für sich; diese ist also um $\frac{1}{12}$ ihrer selbst kleiner, als ihre Hälfte, Drittel und Viertel zusammengenommen. Folglich muß $\frac{1}{12}$ einer gewissen Summe gleich 8, und daher diese Summe 12.8 oder 96 seyn.

29.

Wenn ich zweimal so viel Geld hätte, als ich habe, und fünfmal so viel, als ich habe, so machte dieß mit meinem Gelde, das ich wirklich habe, 100 Thlr. Wie viel Geld habe ich also?

Auflösung:

Das doppelte, fünffache und einfache einer Zahl zusammengenommen, sind das 8fache derselben. Die Frage ist also, eine Zahl zu finden, deren 8faches 100 giebt, und diese ist demnach keine andere, als der 8te Theil von 100, d. i. $12\frac{1}{2}$.

30.

Nachdem Jemand den fünften und dritten Theil seines Geldes verspielt hatte, behielt er noch 14 Thlr. übrig. Wie viel Thaler hatte er?

Auflösung:

$\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$ einer Sache sind zusammen $\frac{8}{15}$ derselben. Zum Ganzen, d. i. zu $\frac{15}{15}$ dieser Sache fehlen also $\frac{7}{15}$ von ihr. Nun betrug aber nach Abrechnung des verspielten Fünftels und Drittels der Überrest vom Ganzen noch 14 Thlr. Mithin sind $\frac{7}{15}$ der unbekannten Summe gleich 14 Thlr. Daher ist $\frac{1}{15}$ derselben 2, und also die Summe selbst 15mal 2 oder 30 Thlr.

Anders: Man nehme an, die unbekannte Anzahl von Thalern habe 15mal eine gewisse Zahl betragen. Hiervon ist das Drittel und Fünftel zusammen 8mal diese Zahl; der Überrest vom Ganzen aber 7mal die unbekannte Zahl. Dieser aber ist auch 14 Thlr. Folglich ist 7mal die unbekannte Zahl 14 Thlr., und diese selbst also der 7te Theil von 14 oder 2. Daher ist die gesuchte Anzahl von Thalern 15mal 2, d. i. 30.

31.

Drei Personen A, B, C haben Schaafe. B hat 3mal so viel als A; C nur $\frac{1}{4}$ so viel als B. Zusammen sind es 19 Stücke. Wie viel hat A gehabt?

Auflösung:

Einmal eine gewisse Zahl (als Antheil von A) 3mal diese Zahl (Antheil von B) und $\frac{3}{4}$ dieser Zahl (Antheil

von C) sind zusammen $\frac{19}{4}$ derselben Zahl. Da nun die drei Personen zusammengenommen 19 Schaafe haben: so ist $\frac{19}{4}$ einer gewissen Zahl gleich 19; also $\frac{1}{4}$ derselben 1, und die Zahl selbst 4. So viel Schaafe hat also A. B hat deren 3mal mehr oder 12, und C den vierten Theil von B, nämlich 3.

32.

Der Fuß einer Säule ist $5\frac{1}{2}$ Fuß hoch; das darauf stehende Holzwerk beträgt die Hälfte der ganzen Säule; über dem Holze liegt Kupfer, dessen Höhe $\frac{1}{5}$, und darüber eine Vergoldung, deren Höhe $\frac{1}{7}$ der ganzen Säule ausmacht. Wie hoch ist die Säule?

Auflösung:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ einer Säule betragen zusammen, auf den Nenner 70 gebracht, $\frac{59}{70}$ derselben. An der ganzen Höhe fehlen demnach $\frac{11}{70}$ derselben. Dieß ist also gleich der Höhe $5\frac{1}{2}$ des Fußgestelles. Wenn nun $\frac{11}{70}$ einer Zahl gleich $5\frac{1}{2}$ oder gleich $\frac{11}{2}$, so ist $\frac{1}{70}$ dieser Zahl gleich $\frac{1}{2}$, und mithin diese Zahl 70mal $\frac{1}{2}$, d. i. 35, und so viel Schuh hoch ist daher die ganze Säule.

33.

Nachdem von einer Gesellschaft jede Person 4 Thlr. gegeben hatte, hatte man 20 Thlr. zu wenig, um die ganze Zeche zu bezahlen, und nachdem jeder noch 1 Thlr. nachgeschossen, behielt man nach der Bezahlung noch 5 Thlr. übrig. Wie viel Personen waren in der Gesellschaft, und wie hoch belief sich die Zeche?

Auflösung:

Ein Thaler Nachschuß auf jede Person bewirkt im Ganzen eine Summe von so vielen Thalern, als Personen in der Gesellschaft sind. Eben diese Summe erkennt sich aber auch erstlich aus den 20 Thalern, die zur Zeche noch fehlten, und dadurch herbei gebracht wurden, und zweitens aus den, nach bezahlter Zeche, noch übrigen 5 Thlr. Diese Summe beträgt also 25 Thlr. Mithin ist auch die Anzahl der Personen 25. Die Zeche aber beläuft sich auf 5mal 25 weniger 5, d. i. auf 120 Thlr.

34.

Es kauft Jemand etliche Pfund Zucker. Giebt er für 1 Pfund 7 Gr., so behält er 10 Gr. übrig; giebt er aber für 1 Pfund 8 Gr., so fehlen ihm zur Bezahlung 30 Gr.

Auflösung:

Der Groschen, der für jedes Pfund weiter bezahlt wird, verursacht einen Aufwand von so viel Groschen, als Pfunde vorhanden sind. Und umgekehrt erkennt man die Anzahl der gekauften Pfunde aus der Anzahl der Groschen, die weiter erfordert werden, indem man für 1 Pfund 8 Gr. anstatt 7 Gr. giebt. Diese Anzahl aber ist, nach den Bedingungen der Aufgabe, offenbar einmal 10 Gr., die anfänglich übrig waren und nun darauf gehen, und dann 30 Gr., die außer jenen noch erfordert werden; mithin im Ganzen 40 Gr. Folglich sind es auch 40 Pfunde.

35.

24 Thaler sollen unter 3 Personen dergestalt vertheilt werden, daß A 2 Thlr. bekommt, wenn B 3

und C 4 Thaler empfängt. Wie viel wird jeder bekommen?

Auflösung:

Diese Aufgabe löset sich durch die gewöhnliche Rechenkunst also auf:

Die Antheile, die A, B, C erhalten, verhalten sich wie 2, 3, 4. Daher verhält sich auch die Summe der Antheile aller zum Antheil von

A, B, C } wie 2, 3 und 4 zusammen, d. i. wie 9 zu { 2, 3, 4.

Da nun die Summe der Antheile Aller 24 Thlr. ist, so hat man folgende 3 Proportionen:

24 : Antheil von A = 9 : 2, also Antheil von A $= \frac{48}{9} = 5\frac{1}{3}$.
24 : Antheil von B = 9 : 3, also Antheil von B $= \frac{24}{3} = 8$.
24 : Antheil von C = 9 : 4, also Antheil von C $= \frac{96}{9} = 10\frac{2}{3}$.

36.

Es wurde Jemand gefragt, wie alt er sey? Er sagte: Ich habe $\frac{1}{5}$ meines Alters in der Kindheit verlebt, $\frac{1}{8}$ in der Jugend, $\frac{1}{2}$ im männlichen Alter, und nun bin ich schon seit 14 Jahren ein Greis. Wie lange hatte er gelebt?

Auflösung:

Die Kindheit, Jugend und männlichen Jahre betragen zusammen $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$ oder $\frac{33}{40}$ des ganzen Alters. Es bleiben also für den Greisenstand $\frac{7}{40}$ desselben übrig. Nun beträgt dieser 14 Jahre. Folglich sind $\frac{7}{40}$ des ganzen Alters gleich 14 Jahren; also ist $\frac{1}{40}$ desselben gleich 2, und daher dieses 40mal 2 oder 80 Jahre.

Anders: Man nehme für das unbekannte Alter eine Zahl, die sich durch 5, 8, 2 theilen läßt. Also z. B. 40x; so sind die Jahre der Kindheit 8x, der Jugend 5x und des männlichen Alters 20x; mithin ihre Summe 33x. Daher bleiben für das Greisenalter 7x Jahre übrig. Dieses ist aber auch 14; folglich ist 7x gleich 14, und x gleich 2. Das gesuchte Alter 40x ist demnach 80 Jahre.

37.

Ein Goldschmidt sagte von einer silbernen Schaale: Wenn sie wöge noch einmal so viel, halb, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ so viel als sie wiegt, und noch 12 Loth dazu, so wöge sie eben so viel über 100, als sie jetzt darunter wiegt. Wie schwer war dieselbe?

Auflösung:

Wenn eine Zahl eben so viel über 100 ist, als eine andere Zahl unter 100; so müssen diese beiden Zahlen zusammen 200 ausmachen, denn was die eine mehr als 100 beträgt, gerade so viel beträgt die andere weniger; ihre Summe ist also nothwendig 200.

Man sucht daher in dem vorliegenden Falle eine solche Zahl, deren Doppeltes, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, das ist, deren $\frac{35}{12}$ um sie selbst, oder um $\frac{12}{12}$ derselben, und noch überdieß um 12 Loth vermehrt, 200 ist. Aber $\frac{35}{12}$ einer Zahl um $\frac{12}{12}$ derselben vermehrt, ist $\frac{47}{12}$ dieser Zahl. Daher muß $\frac{47}{12}$ der unbekannten Zahl 188, und also $\frac{1}{12}$ derselben 4 seyn. Folglich ist die gesuchte Zahl 4mal 12 oder 48 Loth.

38.

Ein Rechenmeister verlangt von seinen Schülern, daß sie den Vorrath seines Gelds nach folgender Angabe berechnen sollen: Wenn ihr dasselbe mit 3 multipliziret, 15 Thlr. hinzu thut, das Kommende durch 6 dividiret, und dann noch 6 Thlr. zum Quotienten addiret, so kommt eben so viel, als es anfangs war. Wie groß war jener Vorrath?

Auflösung:

3mal eine gewisse Zahl und 15 durch 6 getheilt, ist die Hälfte dieser Zahl und noch $\frac{5}{2}$. Also sucht man eine solche Zahl, deren Hälfte, und überdieß $\frac{17}{2}$ gleich dieser Zahl selbst ist. Daher muß $\frac{17}{2}$ die Hälfte dieser Zahl selbst seyn, und diese ist also 17.

39.

Ein Bauer trägt Eier zur Stadt, von denen ihm aber unterwegs 10 gestohlen werden. Von dem Überrest zerbricht er so viele, daß nur noch $\frac{1}{5}$ der anfänglichen Zahl und 2 ganz bleiben. Diese vermehrt er aber durch Aufkaufen um 53 Stück, und findet, daß er jetzt nur 11 Stück weniger als anfangs hatte. Wie viel hatte derselbe also anfänglich?

Auflösung:

Nachdem von der unbekannten anfänglichen Zahl 10 gestohlen worden, ist der Überrest noch diese unbekannte Zahl weniger 10. Hiervon ist ein Fünftel gleich dem fünften Theil der unbekannten Zahl, weniger 2. Kom-

men hierzu noch 2, so ist die Anzahl der ganz gebliebenen Eier gerade $\frac{1}{5}$ der anfänglichen Zahl. Da er nun diese um 53 Stück vermehrt, und nur 11 weniger hat, als anfänglich, so ist die Frage darauf gebracht, eine solche Zahl zu finden, deren $\frac{1}{5}$, um 64 vermehrt, dieser Zahl selbst gleich ist. Mithin ist 64 gleich $\frac{4}{5}$ derselben Zahl; also 16 gleich $\frac{1}{5}$ derselben, und die verlangte Zahl demnach 5mal 16 oder 80 Stücke.

40.

Ein Vater hinterläßt 3 Söhne, und verordnet: daß von seinem Vermögen der erste 1000 Thlr. weniger, als die Hälfte der Verlassenschaft; der zweite 800 weniger, als den dritten Theil der Verlassenschaft, und der dritte 600 weniger, als den vierten Theil der Verlassenschaft erhalten solle. Wie groß war die Verlassenschaft, und was bekam Jeder?

Auflösung?

Es sey die Verlassenschaft eine solche Zahl, die durch 2, 3, 4 leicht getheilt werden kann; also 12mal eine gewisse, noch unbekannte Zahl; so erhält

A 6mal die unbekannte Zahl weniger 1000 Thl.
B 4mal die unbekannte Zahl weniger 800 —
C 3mal die unbekannte Zahl weniger 600 —

also alle zusammen 13mal die unbekannte Zahl weniger 2400 Thlr. Dieß muß der ganzen Verlassenschaft oder 12mal der unbekannten Zahl gleich seyn; daher wird sich nothwendig einmal die unbekannte Zahl gegen die abzuziehende 2400 Thlr. aufheben, und dieselbe also

dieser Summe gleich seyn. Mithin ist die Verlassenschaft 12mal 2400 oder 28800 Thlr., woraus die Antheile von A, B, C sehr leicht zn berechnen sind.

Anders: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, die zusammen $\frac{13}{12}$ oder $1\frac{1}{12}$ ausmachen, übertreffen also die Einheit um ihren 12ten Theil. Erhielten nun A gerade die Hälfte der Verlassenschaft, B den dritten Theil und C den vierten Theil derselben, so bekämen sie zusammen die ganze Verlassenschaft und noch den 12ten Theil derselben. Da aber nur die Verlassenschaft ausgetheilt wird, und weder mehr noch weniger, so muß dieser 12te Theil derselben durch die Summe der jedem einzelnen abgezogenen Anzahl von Thalern wieder aufgehoben oder getilgt werden. Diese Summe aber beträgt 2400. Folglich ist $\frac{1}{12}$ der ganzen Verlassenschaft 2400 Thlr., und diese also 12mal 2400, d. i. 28800.

41.

Ein Vater hinterläßt 4 Söhne und 8600 Thaler. Nach seinem Testamente soll A 2mal so viel bekommen, als B, weniger 100 Thlr. B soll 3mal so viel bekommen, als C, weniger 200 Thlr. C soll 4mal so viel bekommen, als D, weniger 300 Thlr. Wie viel bekommt jeder?

Auflösung:

Man nehme an, es habe D eine gewisse Anzahl Thaler und noch 100;

so hat { C 4mal diese Anzahl Thlr. und ebenfalls 100.
B 12mal diese Anzahl Thlr. und 100.
A 24mal diese Anzahl Thlr. und 100.

Also alle zusammen 41mal die unbekannte Anzahl Thlr. und 400. Da nun diese Summe 8600 Thlr. betragen soll; so ist demnach 41mal die unbekannte Anzahl Thlr. gleich 8200, und diese unbekannte Zahl also der 41ste Theil von 8200, nämlich 200.

Daher hat	D	200 und 100 oder 300.
	C	800 und 100 oder 900.
	B	2400 und 100 oder 2500.
	A	4800 und 100 oder 4900.

42.

Ich bin jetzt 46 Jahre alt, und mein Sohn ist 11. In wie viel Jahren wird mein Sohn halb so alt seyn, als ich?

Auflösung:

Es verfließe eine gewisse Anzahl von Jahren, so ist alsdann am Ende derselben das Alter des Vaters: 46 vermehrt um diese Anzahl Jahre. Das Alter des Sohnes: 11 vermehrt um eben diese Anzahl Jahre. Wenn nun das Alter des Sohnes die Hälfte von dem des Vaters seyn soll; so ist also 11 vermehrt um eine gewisse Zahl gleich 23 vermehrt um die Hälfte eben dieser Zahl. Mithin ist auch 11 vermehrt um die Hälfte dieser unbekannten Zahl gleich 23; das ist, die Hälfte dieser unbekannten Zahl ist 12, also diese selbst 24. Das verlangte wird also nach 24 Jahren geschehen.

Anders: Da der Sohn mit dem Vater zugleich um 1 Jahr älter wird, so ist der Unterschied des Alters von beiden in jedem Jahr ihres Lebens derselbe; also auch in demjenigen, da des Vaters Alter noch so groß,

als das Alter des Sohnes ist. In diesem Jahre aber ist dieser Unterschied gerade das Alter des Sohns. Nun ist dieser Unterschied auch 46 weniger 11, oder 35 Jahre; mithin ist 35 das Alter des Sohns in dem Jahre, da des Vaters Alter doppelt so groß, also 70 ist. Es war aber der Sohn anfänglich 11 Jahre alt, mithin verfließen bis zu seinem 35sten 24 Jahre, nach welchen der Vater statt 46 nun 70 Jahre und also, wie es seyn muß, noch so alt ist, als der Sohn.

43.

Ich bin jetzt 46, mein Sohn A ist 11, und mein Sohn B ist 9 Jahre alt. Wann werden beide Söhne so alt seyn, als ich?

Auflösung:

Da der Vater 46 und beide Söhne zusammen 20 Jahre alt sind; so ist der Unterschied zwischen dem Alter des Vaters und dem beider Söhne 26. Im folgenden Jahre muß dieser Unterschied 1 weniger betragen, und 25 seyn, weil jeder der drei Personen 1 Jahr älter wird, also im Subtrahendus 2 Einheiten weiter kommen, und in den Minuendus nur eine. So geht es auch mit den folgenden Jahren, so daß die Unterschiede zwischen dem Alter des Vaters und der Summe der Alter beider Söhne eine abnehmende arithmetische Progression bilden, deren höchstes oder erstes Glied 26, und Unterschied 1 ist. Nun will man wissen, nach wie vielen Jahren, von jetzt an, das Alter des Vaters so groß ist, als das beider Söhne zusammen. Da aber in diesem Falle der Unterschied zwischen dem Alter des

Vaters und der Summe der Jahre der Söhne Null ist, so geschieht dieß also nach so vielen Jahren, als die bis auf 0 abnehmende natürliche Progression: 25, 24....0 Glieder hat, das ist, nach 26 Jahren. Nach Verfluß dieser ist der Vater 72, der Sohn A 37, und der Sohn B 35, also diese beide zusammen ebenfalls 72 Jahre alt.

44.

Ein Vater hinterläßt seinen 11 Kindern 3600 Thlr. mit der Verordnung, daß jede Tochter 360 Thlr. und jeder Sohn 300 Thlr. erhalten soll. Bei der Theilung gieng das Vermögen gerade auf. Wie viel Söhne und Töchter waren es?

Auflösung:

Gesetzt, es seyen x Söhne; so erhalten sie miteinander 300x Thlr. Da nun die ganze Erbschaft 3600 Thlr. beträgt, so ist der Antheil aller Töchter 3600 — 300x, und weil jede derselben 360 Thlr. bekommt, so muß die Anzahl der Töchter $\frac{3600 - 300x}{360}$, oder $10 - \frac{5x}{6}$ seyn. Im Ganzen sind es aber 11 Kinder; daher ist $10 - \frac{5x}{6} + x = 11$, oder $\frac{x}{6} = 1$, mithin $x = 6$. Es sind also 6 Söhne und 5 Töchter.

Anders: Da 11 Kinder, Söhne und Töchter, vorhanden sind, so können, wenn man sie Paarweise zusammen nimmt, nur folgende Fälle statt finden:

Entweder sind es 5 Paare, und dann ist ein Sohn oder eine Tochter übrig.

Oder es sind 4 Paare, dann sind entweder 3 Söhne oder 3 Töchter übrig, u. s. w.

Im ersten Fall wird 3600 mit 660, als der Erbschaft eines Paars, getheilt, entweder 300 oder 360 zum Rest lassen.

Im andern aber wird dieser Rest 3.300 oder 3.360 seyn u. s. w.

Nun ist aber, wenn man 3600 mit 660 dividirt, der Quotient 5, und der Überrest gerade 300; folglich sind es, nach dem ersten Falle, 5 Paare und ein Sohn, das ist: es sind 6 Söhne und mithin 5 Töchter.

45.

In einer Stadt liegen 300 Reuter und Infanteristen. Ein Reuter bekommt monatlich 8 Thlr. und ein Infanterist 5 Thlr.; der ganze monatliche Sold aber beträgt 1800 Thlr. Wie viel sind es Reuter und wie viel Infanteristen?

Auflösung:

Es seyen x Reuter, so ist ihr Monatssold 8x; mithin der Monatssold der Infanteristen 1800 — 8x Da nun jeder 5 Thlr. erhält, so ist also die Anzahl der leztern $\frac{1800-8x}{5}$ oder $360-\frac{8x}{5}$. Nun beträgt aber die Anzahl der Reuter und Infanteristen 300, daher ist $360-\frac{8x}{5}+x=300$ oder $60-\frac{3x}{5}=0$, also $20=\frac{x}{5}$ und $x=100$. Daher sind es 100 Reuter und 200 Infanteristen.

Anders: Dasselbe Verhältniß, das zwischen 300 Mann statt findet, die zusammen 1800 Thlr. Monatssold haben, hat auch zwischen 3 Mann statt, deren

Monatssold zusammen 18 Thlr. ausmacht. Diese bestehen nun entweder aus 2 Reutern und 1 Infanteristen, oder aus 2 Infanteristen und 1 Reuter. Im ersten Falle wäre der Monatssold dieser 3 Mann 21 Thaler anstatt 18. Im zweiten aber beträgt derselbe wirklich 18 Thlr. Wenn demnach unter 3 Mann 2 Infanteristen und 1 Reuter befindlich sind, so müssen unter 300 Mann 200 Infanteristen und 100 Reuter seyn, deren Monatssold zusammen anstatt 18 Thlr. 1800 ausmacht.

46.

Ein Bauer erndtete 15mal so viel, als er ausgesäet hatte, und noch 7 Scheffel darüber. Nachdem er nun die Hälfte der ganzen Erndte weggegeben, behielt er noch 306 Scheffel übrig. Wie viel Scheffel hatte er ausgesäet?

Auflösung:

Da er die eine Hälfte seiner Erndte weggiebt, so behält er die andere Hälfte noch übrig. Diese ist nun $\frac{15}{2}$mal die Aussaat, vermehrt um $\frac{7}{2}$ Scheffel. Da dieselbe nun auch gleich 306 Scheffel ist, so hat man, wenn man alles doppelt nimmt, 15mal die Aussaat, vermehrt um 7 Scheffel gleich 612 Scheffel. Also ist 15mal die Aussaat 605 Scheffel, und daher die Aussaat $\frac{605}{15} = 40\frac{1}{3}$ Scheffel.

47.

Ein Herr vermacht seinen Bedienten zusammen 2000 Thlr., darein sie sich nach Verhältniß ihres Lohns theilen. Nun hat der Verwalter jährlich 50 Thlr., der

Kammerdiener 40, der Koch 35, und jeder der 5 Lakayen 20 Thlr. Wie viel wird jeder von den 2000 Thalern bekommen?

Auflösung:

Die gewöhnliche Rechenkunst löset diese Aufgabe also auf:

Jahreslohn	des Verwalters	50 Thlr.
	des Kammerdieners	40 —
	des Kochs	35 —
	der 5 Lakayen	100 —
	Summe	225 Thlr.

Und nun, um den Antheil des Verwalters 2c. zu bekommen, schließe man also:

Die den Jahreslohn 225 Thlr. haben, theilen 2000 Thlr. Wie viel trifts hiervon den, der den Jahreslohn 50 hat? oder:

225 : 2000 = 50 : Antheil des Verwalters.
Ferner: 225 : 2000 = 40 : Antheil des Kammerdieners.
225 : 2000 = 35 : Antheil des Kochs.

Endlich ist, ohne eine neue Proportion zu machen, der Antheil der 5 Lakayen dem doppelten Antheil des Verwalters gleich, welche Summe sodann noch in 5 gleiche Theile getheilt werden muß.

48.

Ein Vater hinterläßt 3 Söhne, und 1600 Thaler. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Thlr. mehr haben, als der zweite, der zweite aber 100 Thlr. mehr, als der dritte. Wie viel bekommt jeder?

Auflösung:

Wenn man mit dem dritten Sohn anfängt, so bekommt derselbe also eine gewisse Summe, der zweite 100 mehr, der dritte 200 mehr als dieser, also 300 mehr als der dritte. Wenn man also 400 Thlr. abrechnet, so geht der Überrest 1200 in 3 gleiche Theile. Hiervon erhält demnach C den dritten Theil, oder 400, B eben so viel und noch 100, also 500, und A das lezte Drittel und noch 300, mithin 700 Thlr.

49.

Ein Knabe kauft Nüsse. Demselben begegnet ein anderer und spricht: Wie viel hast du bekommen? Er antwortet: Wenn du es ausrechnen kannst, so will ich dir den fünften Theil davon geben. Wenn ich zu meinen Nüssen die Hälfte, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ addire, und von der Summe $3\frac{1}{2}$mal $2\frac{6}{7}$ subtrahire, so bleiben 80. Wie viel wirst du nun bekommen?

Auflösung:

Die Anzahl der Nüsse, ihre Hälfte, ihr Fünftel und ihr Zehntel betragen zusammen $\frac{18}{10}$ oder $\frac{9}{5}$ derselben; $3\frac{1}{2}$mal $2\frac{6}{7}$ aber ist $\frac{7}{2}$mal $\frac{20}{7}$ oder 10. Man verlangt also eine solche Zahl, deren $\frac{9}{5}$ um 10 vermindert, 80 zum Rest lassen. Mithin muß $\frac{9}{5}$ derselben 90 seyn. Daher ist $\frac{1}{5}$ der unbekannten Zahl 10, und diese also 50. Hiervon erhält der fragende Knabe das so eben gefundene Fünftel, nämlich 10 Nüsse.

50.

Ein junger Mensch bewirbt sich um eine Jungfer. Diese frägt ihre Muhme, ob sie wohl alt genug zum Heirathen sey? Alt genug, antwortet diese; denn wenn ich $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$ deiner Jahre mit 8 multiplizire, und vom Produkt 63 abziehe, so bleibt Methusalems Alter, 969 Jahre, übrig. Wie alt war diese Jungfer?

Auflösung:

$\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$ einer gewissen Anzahl Jahre betragen zusammen $\frac{43}{18}$ derselben. Dieß mit 8 multiplizirt, ist $\frac{172}{9}$ dieser Jahre, welche demnach 1032 betragen. Daher ist $\frac{1}{9}$ des unbekannten Alters gleich dem 172sten Theil von 1032, oder gleich 6, und also diese selbst 6mal 9 oder 54 Jahre.

Anders: Es sey das unbekannte Alter 18x; so ist $\frac{2}{3}$ desselben 12x, $\frac{5}{6}$ desselben aber gleich 15x, und $\frac{8}{9}$ desselben 16x. Mithin betragen $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$ der unbekannten Jahre zusammen 43x. Diese Summe, mit 8 multiplizirt, ist 344x. Folglich muß $344x - 63 = 969$, also $344x = 1032$, und $x = \frac{1032}{344} = 3$ seyn. Daher ist das gesuchte Alter 3.18 oder 54 Jahre.

51.

Man hat drei Fässer. Wird das zweite aus dem ersten gefüllt, so bleiben im ersten $\frac{2}{3}$ übrig; wird das dritte aus dem ersten gefüllt, so bleiben $\frac{5}{9}$ übrig; wird

aber das erste aus den beiden andern gefüllt, so fehlen 8 Ohm. Wie viel Ohm hält jedes von diesen Fässern?

Auflösung:

Da im ersten, wenn das zweite aus ihm gefüllt wird, $\frac{2}{3}$ des Ganzen zurück bleiben; so ist das zweite $\frac{1}{3}$ oder $\frac{3}{9}$ des ersten. Da ferner im ersten, wenn das dritte aus ihm gefüllt wird, $\frac{5}{9}$ des Ganzen zurück bleiben, so folgt, daß das dritte $\frac{4}{9}$ des ersten sey. Demnach betragen das zweite und dritte zusammen $\frac{7}{9}$ des ersten. Es fehlt ihnen beiden also, um dem ersten gleich zu seyn, $\frac{2}{9}$ desselben. Nach der Bedingung der Aufgabe fehlt aber diesen beiden auch, um das erste voll zu machen, 8 Ohm. Folglich betragen $\frac{2}{9}$ des ersten Fasses 8 Ohm, demnach $\frac{1}{9}$ desselben 4 Ohm, und es hält also das erste Faß 4mal 9 oder 36 Ohm. Die beiden andern halten, wie gezeigt worden, $\frac{3}{9}$ und $\frac{4}{9}$ des ersten, und mithin 12 und 16 Ohm.

52.

20 Personen, Meister und Gesellen, haben 2 Thlr. 18 Groschen, oder 90 Groschen verzehrt. Der Wirth sagt, wenn jeder Meister 6 Gr. und jeder Gesell 4 Gr. giebt, so ist die Zeche bezahlt. Wie viel warens Meister und Gesellen?

Auflösung:

Es seyen x Meister gewesen, so beträgt ihre Zeche 6x Gr.; und mithin die der Gesellen 90 — 6x. Da nun jeder Gesell 4 Groschen bezahlte, so ist die Anzahl der Gesellen $\frac{90 - 6x}{4}$ oder $\frac{45 - 3x}{2}$. Meister und Ge-

sellen sind es aber im Ganzen 20, mithin ist $x + \frac{45 - 3x}{2} = 20$, oder $45 - x = 40$, also $x = 5$. Es sind demnach 5 Meister, und also 15 Gesellen gewesen.

53.

20 Personen, Männer und Weiber, verzehren in einem Wirthshause 6 Thlr. oder 144 Gr. 1 Mann verzehrt 8 Gr. und 1 Weib 7 Gr. Wie viel waren es Männer und Weiber?

NB. Löset sich wie die vorhergehende Aufgabe auf.

54.

Man soll 36 Gr. in 6 Theile dergestalt vertheilen, daß jeder folgende Theil 1 Gr. mehr beträgt, als der vorhergehende. Wie groß wird jeder Theil seyn?

Auflösung:

Die 6 Theile bilden eine arithmetische Progression von eben so viel Gliedern, deren Differenz 1 und Summe 36 ist. Es kommt also nur darauf an, das erste Glied zu finden. Da nun in jeder arithmetischen Progression die Summe der Glieder gefunden wird, wenn man die Summe des ersten und lezten Glieds mit der halben Anzahl der Glieder multiplizirt, so wird man also die Summe des ersten und lezten Glieds erhalten, wenn man die Summe aller Glieder (hier 36) mit der halben Anzahl der Glieder (hier 3) dividirt. Mithin ist 12 die Summe des ersten und lezten Glieds. Es ist aber ferner das lezte Glied selbst wieder eine Summe des ersten Glieds, und des Produkts aus der Differenz

(hier 1) in die Anzahl der Glieder weniger 1 (hier also in 5). Folglich ist 12 eine Summe des doppelten ersten Glieds und der Zahl 5. Zieht man also 5 von 12 ab, so ist der Überrest 7 gleich dem doppelten ersten Glied, und dieses ist demnach $3\frac{1}{2}$. Die Progression selbst aber ist $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ 2c. bis $8\frac{1}{2}$ Gr.

Auf eben dieselbe Art lösen sich auch folgende 3 Aufgaben No. 55, 56 und 57 auf.

55.

Einem Weintrinker werden auf eine Woche 14 Bouteillen Wein zum Geschenk versprochen, doch so, daß er an jedem folgenden Tage $\frac{1}{3}$ Bouteille mehr trinke, als am vorhergehenden, und am siebenten Tage alles verzehrt sey. Wie viel muß er täglich trinken?

56.

48 Thlr. sollen unter 9 Personen also vertheilt werden, daß der folgende immer $\frac{1}{2}$ Thlr. mehr bekommt, als der vorhergehende. Wie viel muß nun der erste bekommen?

57.

Ein Mann ist 506 Thlr. schuldig, die er in 11 Jahren dergestalt bezahlen will, daß er in jedem folgenden Jahre 3 Thlr. mehr, als im vorhergehenden bezahlt. Wie viel muß er im ersten Jahre bezahlen?

58.

Ein Kaufmann steckt eine gewisse Summe in den Handel und gewinnt jedes Jahr so viel, als er anfangs angelegt hat. Nach 9 Jahren besteht sein Kapital gerade aus 2000 Thlrn. Wie viel hat er anfangs angelegt?

Auflösung:

Da der Kaufmann jedes Jahr mit dem angelegten Kapital eine Summe gewinnt, die diesem Kapital gleich ist, so gewinnt er in 9 Jahren 9mal das anfängliche Kapital. Schlägt man also zu diesem Gewinnst das Kapital selbst, so ist dasselbe mithin auf 10mal das anfängliche Kapital angewachsen. Eben diese Summe beträgt aber auch 2000 Thlr. Mithin ist 10mal das anfängliche Kapital 2000 Thlr., und daher das gesuchte Kapital 200 Thlr.

59.

Ein großer Herr will eine ganze Woche traktiren, und dazu 2186 Thlr. dergestalt verwenden, daß an jedem folgenden Tage 3mal so viel Aufwand gemacht werde, als am vorhergehenden. Was ist also der Aufwand des ersten Tages?

Auflösung:

Der Aufwand des ersten Tages sey x,

so ist der des	zweiten	3x,
	dritten	9x,
	vierten	27x,
	fünften	81x,
	sechsten	243x,
	siebenten	729x;

mithin die Summe des Aufwands aller Tage = 1093x. Ebenderselbe ist aber auch 2186; daher ist 1093x = 2186, und also $x = \frac{2186}{1093} = 2$.

Anmerkung: Man könnte diese und die zwei folgenden Aufgaben auch durch Hilfe der Eigenschaften der geometrischen Progressionen auflösen.

60.

4 Personen sollen sich dergestalt in 100 Thlr. theilen, daß der folgende immer noch einmal so viel bekommt, als der vorhergehende. Wie viel bekommt der erste?

Die Auflösung ist wie die der vorigen Aufgabe.

61.

Man will ein Kapital von 300 Thlrn. dergestalt in 4 Terminen bezahlen, daß man in jedem Termin die Halbscheid des vorhergehenden Termins entrichtet. Wie viel muß das erstemal bezahlt werden?

Auflösung:

Gesetzt, man bezahle im ersten Termin 8x Thaler,

so ist zu entrichten im	zweiten	4x	—
	dritten	2x	—
	vierten	1x	—

also in allen vier Terminen 15x. Diese Summe ist demnach 300, und mithin $x = \frac{300}{15} = 20$. Man bezahlt also im ersten Termin 20.8 oder 160 Thlr.

62.

Ein Knabe hatte einen Beutel voll Nüsse, ein anderer nahm in seiner Abwesenheit die Hälfte und 3 Stück davon. Darauf kam ein dritter, und entwendete ihm wieder die Hälfte und 4 Stück. Zulezt fand sichs, daß nur noch der sechste Theil von seinem ersten Vorrath übrig war. Wie viel Nüsse hatte der Knabe anfangs?

Auflösung:

Man nehme an, der Vorrath von Nüssen sey anfänglich gewesen $4x - 6$. Hiervon gieng ab die Hälfte

$2x - 3$ und 3 Stück, im Ganzen also $2x$ Stück. Es bleiben daher noch $2x - 6$ übrig. Von diesem Überrest wurde wieder entwendet die Hälfte $x - 3$ und 4 Stück, zusammen also $x + 1$ Stück; dieß von $2x - 6$ abgezogen, giebt den Rest $x - 7$. Da nun dieser der sechste Theil von dem anfänglichen Vorrath seyn soll, so wird derselbe also 6fach genommen, jenem Vorrath gleich seyn, und man hat daher $6x - 42 = 4x - 6$, woraus $x = 18$ folgt. Also waren es anfänglich $4 . 18 - 6$ oder 66 Nüsse.

Anmerkung: Die Annahme $4x - 6$ als anfänglicher Vorrath, ist zur Vermeidung der Brüche sehr bequem; aber nicht die einzige, die die Rechnung erleichtert. Man hätte derselben z. B. auch $8x - 6$, $12x + 6$ u. s. w. setzen können. Alle diese Formen, unter denen die unbekannte Größe vorgestellt wird, sind zur Auflösung dieser Aufgabe bei weitem mehr tauglich, als wenn man, wie Anfänger öfters, ohne die Natur der Aufgabe zu untersuchen, glauben, dieser unbekannte Vorrath x geheißen hätte. Einige der folgenden Aufgaben werden diesen Kunstgriff noch mehr erläutern.

63.

Es geht ein Bauer in die Stadt, und hat einen Korb mit Äpfeln. In dem äußersten Thore soll er die Accise erlegen: Da er aber kein Geld hat, giebt er dem Einnehmer die Hälfte seiner Äpfel und noch einen halben, ohne einen zu zerschneiden; im zweiten Thore hat er keinen Acciszettel, und zur Strafe muß er dem Aufseher wieder die Hälfte und einen halben Apfel geben:

im dritten giebt er abermals die Hälfte und einen halben dazu. Als er in die Stadt kommt, findet er, daß ihm 14 Äpfel fehlen. Wie viel hatte er anfangs?

Auflösung:

Wenn man den anfänglichen Vorrath x setzen wollte, würde die Rechnung wegen der Brüche abermals sehr unbequem werden. Man nehme also an, dieser Vorrath sey gewesen: . . . . $8x + 7$,
so gab er am ersten Thor hiervon ab: die
Hälfte $4x + \frac{7}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$, also im Ganzen $4x + 4$
Rest: $4x + 3$;
am zweiten Thor giebt er abermals ab:
die Hälfte, nämlich $2x + \frac{3}{2}$, und noch
überdieß $\frac{1}{2}$, im Ganzen also . . . . . $2x + 2$
Rest: $2x + 1$;
am dritten Thor giebt er endlich noch einmal die Hälfte, nämlich $x + \frac{1}{2}$, und außerdem noch $\frac{1}{2}$ ab, also im Ganzen . . . $x + 1$
Rest: x.

Da ihm also von dem anfänglichen $8x + 7$ nur noch x übrig bleiben, so hat er $7x + 7$ abgegeben, und diese fehlen ihm. Es fehlen ihm aber auch 14; folglich ist $7x + 7 = 14$, also $x = 1$. Er hatte demnach anfänglich $8x + 7$ oder 15 Stück.

Anmerkung: Die Annahme $8x + 7$ für die anfängliche Zahl ist nicht zufällig, sondern auf folgende Art gefunden worden: Die Bedingung der Aufgabe, daß an jedem Thor die Hälfte des Vorraths und $\frac{1}{2}$ abgegeben wird, indem sie die Abgabe als eine zweitheilige Größe vorstellt, macht es auch

nöthig, die anfängliche Anzahl zweitheiligt (aus zwei mit + zusammenhängenden Gliedern bestehend) zu machen. Es sey also dieser Vorrath $mx + n$, wo m und n noch zu bestimmende ganze Zahlen sind.

Hiervon geht ab: die Hälfte $\frac{m}{2}x + \frac{n}{2}$ und $\frac{1}{2}$, also $\frac{m}{2}x + \frac{n+1}{2}$, mithin bleibt übrig $\frac{m}{2}x + \frac{n-1}{2}$ oder $\frac{2mx}{4} + \frac{2n2}{4}$.

Hiervon geht am zweiten Thor abermal ab: die Hälfte und $\frac{1}{2}$, also im Ganzen $\frac{mx}{4} + \frac{n-1}{4} + \frac{1}{2}$ oder $\frac{mx}{4} + \frac{n+1}{4}$, mithin bleibt übrig: $\frac{mx}{4} + \frac{n-3}{4}$ oder $\frac{2mx}{8} + \frac{2n-6}{8}$.

Am dritten Thor geht noch einmal die Hälfte hiervon und wieder $\frac{1}{2}$, also im Ganzen $\frac{mx}{8} + \frac{n+1}{8}$, ab, mithin bleiben übrig: $\frac{mx}{8} + \frac{n-7}{8}$.

Da nun dieser Überrest, der Natur der Sache nach, eine ganze Zahl seyn muß, m und n aber unbestimmt, und mithin der Willkühr überlassen sind, so nehme man $m = 8$ und $n = 7$ an, dadurch wird jener Überrest x, und die obige Annahme $8x + 7$ ist damit erklärt.

64.

Es will Jemand in einer kleinen Stadt Zitronen verschenken. Er giebt dem Magistrat die Hälfte der ganzen Zahl und die Hälfte einer Zitrone, seinem Vater $\frac{1}{3}$ des Rests mit $\frac{1}{3}$ einer Zitrone, seiner Mutter $\frac{1}{4}$ des Rests und $\frac{1}{4}$ einer Zitrone, seinem Bruder $\frac{1}{5}$ des Rests und $\frac{1}{5}$ Zitrone, seiner Schwester $\frac{1}{6}$ des Rests und $\frac{1}{6}$ Zitrone, einem Freund $\frac{1}{7}$ des Rests und $\frac{2}{7}$ einer Zitrone: da ihm nun noch 16 Stück übrig bleiben, so vertheilt er sie unter die Armen. Wie viel Zitronen hat er also gehabt?

Auflösung:

Man nehme an, die Anzahl der Zitronen sey gewesen: $420x - 301$,

so erhielt: der Magistrat die Hälfte dieser Zahl und $\frac{1}{2}$ Zitrone, also: . . . . $210x - 150$

Rest $210x - 151$,

der Vater $\frac{1}{3}$ dieses Rests und $\frac{1}{3}$ Zitrone, oder: $70x - 50$

Rest $140x - 101$,

die Mutter $\frac{1}{4}$ des Rests und $\frac{1}{4}$ Zitrone, also: $35x - 25$

Rest $105x - 76$,

der Bruder $\frac{1}{5}$ des Rests und $\frac{1}{5}$ Zitrone, also: $21x - 15$

Rest $84x - 61$,

die Schwester $\frac{1}{6}$ des Rests und $\frac{1}{6}$ Zitrone, also: $14x - 10$

Rest $70x - 51$,

der Freund $\frac{1}{7}$ des Rests und $\frac{2}{7}$ Zitrone, oder: $10x - 7$

Rest $60x - 44$.

Nun blieben noch 16 Stuck übrig; daher ist $60x - 44 = 16$, und also $x = 1$. Es waren demnach $420 - 301$ oder 119 Stück Zitronen.

Anmerkung: Der Kunstgriff, nach welchem wir die Anzahl der Zitronen $420x - 301$ setzten, hat einen ähnlichen Grund, wie bei der vorhergehenden Auflösung. Man nehme an, diese Zahl sey $mx + n$, so wird sich zeigen, daß m eine Zahl seyn muß, die durch 2, 3, 4, 5, 6, 7 theilbar ist. Die kleinste Zahl dieser Art ist aber 420. Was sofort die andere, n, anbetrifft, so ist sie schwerer zu finden. Die Untersuchung zeigt nämlich, daß sie von solcher Beschaffenheit seyn müsse, daß

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \frac{n-1}{2} \\ 2) & \frac{n-2}{3} \\ 3) & \frac{n-3}{4} \\ 4) & \frac{n-4}{5} \\ 5) & \frac{n-5}{6} \\ 6) & \frac{n-7}{7} \end{array}\right\} = \text{einer ganzen Zahl sey.}$$

Zulezt aber ergiebt sich noch, daß für bejahte x, n negativ seyn müsse. Wie sich nun ein solches n finden lasse, ist Anfängern nicht leicht zu sagen. Es sey daher dem Lehrer überlassen, dieses zu zeigen, welches am bequemsten dadurch geschehen kann, daß man zuerst die erste Bedingung vornimmt, und das n sucht, das ihr Genüge thun muß; dann das, welches den zwei ersten Bedingungen Genüge leistet u. s. w. Zulezt wird sich ergeben, daß das

kleinste n, das alle Bedingungen erfüllet, = — 301 ist, und so entstand also die Annahme 420x — 301.

65.

Ein Vater hinterläßt einige Kinder, und ein Vermögen, das unter sie gleich vertheilt werden soll. Der erste bekommt 100 Thlr. und $\frac{1}{10}$ des Rests; der zweite 200 Thlr. und $\frac{1}{10}$ des Rests, der dritte 300 Thlr. und $\frac{1}{10}$ des Rests, und so der folgende immer 100 Thlr. mehr. Wie groß war das Vermögen, wie viel warens Kinder, und was bekam jedes?

Auflösung:

Der Antheil eines jeden Kindes besteht, nach den Bestimmungen dieser Aufgabe, aus zwei verschiedenen Summen. Die eine ist eine Anzahl von so viel 100 Thalern, als, dieß Kind mit eingerechnet, bereits Kinder ihren Antheil erhalten haben: Die andere ist der zehnte Theil des noch vorhandenen Überrests. Das lezte Kind allein macht hierinn in sofern eine Ausnahme, als diese zweite Summe bei ihm nicht statt finden kann: denn wenn es den zehnten Theil eines Überrests bekäme, so blieben sodann noch $\frac{9}{10}$ zum Vertheilen für ein folgendes übrig: d. i. dieß Kind wäre nicht das lezte. Es seyen also: A, B, C.... M, N der Ordnung nach die verschiedenen Kinder, und N das lezte, M aber das vorlezte derselben. Ferner sey ihre Anzahl x. So erhält also das lezte oder N 100x Thlr.; M aber, als das x — 1te bekommt 100 (x — 1) und noch $\frac{1}{10}$ des Rests. Nach der Bedingung der Aufgabe erhalten aber alle Kinder gleich viel von der Erbschaft; folglich

ist $100x = 100(x-1) + \frac{1}{10}$ des Rests, und demnach ist $\frac{1}{10}$ des Rests $= 100$ Thlr. Nun kann aber das lezte Kind N nichts anders mehr bekommen, als was ihm M übrig läßt, nämlich $\frac{9}{10}$ des Rests. Da aber $\frac{1}{10}$ des Rests $= 100$ gefunden wurde, so ist $\frac{9}{10}$ desselben $= 900$. Mithin bekommt das lezte Kind, und folglich jedes 900 Thlr. Es bekommt aber ferner jedes Kind so vielmal 100 Thlr., als bereits Kinder ihren Antheil erhalten haben. Da nun das lezte 900 Thlr. erhält, so ist dasselbe also das 9te Kind; d. i. es sind im Ganzen 9 Kinder. Erhält aber von 9 Kindern jedes 900 Thlr., so muß das hinterlassene Vermögen 8100 Thlr. betragen.

Anmerkung: Man kann diese ganze Auflösung auch durch bloses Räsonnement bewerkstelligen. Dabei bleibt alles, wie in der vorhergehenden Auflösung bis dahin, wo die Antheile von N und M also angegeben werden: N erhält also so vielmal 100, als Kinder sind; M aber so vielmal 100 als Kinder sind, weniger einmal 100 und noch $\frac{1}{10}$ des Rests. Da nun N und M gleichviel bekommen, so muß sich also bei dem Antheil von M der zehnte Theil des Rests mit dem Glied: weniger einmal 100 aufheben, das heißt ihm gleich seyn; denn auf diese Art bekommen N und M gleich viel, nämlich so vielmal 100, als Kinder sind. Ist nun aber $\frac{1}{10}$ des Rests 100, so ist $\frac{9}{10}$ desselben, als der Antheil des lezten Kindes, 900 u. s. w. wie oben.

Äusserst ungeschickt wäre es, die Erbschaft als die unbekannte Größe anzusehen, die Antheile von A und B nach den Bedingungen der Aufgabe daraus zu berechnen, und sodann einander gleich zu setzen.

Man kann auch aus dieser Aufgabe lernen, daß es nicht gleichgültig ist, welche von mehreren von einander abhängenden Größen man als die unbekannte, oder als x ansiehet. Es lassen sich aber deshalb keine allgemeinen Regeln geben. Nur so viel etwa ist richtig, daß in solchen Fällen diejenige die unbekannte Größe seyn muß, aus der sich die übrigen am leichtesten, lichtvollsten herleiten lassen. So wurde hier die Anzahl der Kinder = x gesetzt. Denn, wenn diese bestimmt werden könnte, so hätte man auch, durch Betrachtung der Erbschaft des lezten Kindes, dessen Antheil; und aus der Anzahl der Kinder und dem Antheil eines jeden ergiebt sich sofort die Erbschaft.

Ferner würde man auch eine sehr unzierliche Auflösung erhalten, wenn man zwei unbekannte Größen x und y in die Rechnung einführen wollte.

31.

Ein unverheiratheter Liebhaber der Rechenkunst setzte seine Freunde zu Erben ein, also daß A bekommen sollte 1 Thlr. und $\frac{1}{9}$ des übrigen; B 2 Thlr. und $\frac{1}{9}$ des übrigen; C 3 Thlr. und $\frac{1}{9}$ des übrigen, und so der folgende immer 1 Thlr. weiter und $\frac{1}{9}$ des übrigen. Nun bekamen alle gleich viel. Wie groß war also das Vermächtniß und die Zahl der Erben?

Auflösung:

Der lezte bekommt so viel Thlr., als Erben sind, und kein $\frac{1}{9}$ des übrigen, weil sonst noch $\frac{8}{9}$ für einen folgenden übrig bleiben, der nicht mehr vorhanden ist.

Der vorlezte bekommt so viel Thlr. als Erben sind, weniger 1 Thlr. und noch $\frac{1}{9}$ des Rests. Da er nun eben so viel erhalten soll, als der lezte, so müssen sich die Glieder $\frac{1}{10}$ des Rests, und: weniger 1 Thlr. aufheben; das ist: $\frac{1}{9}$ des Rests wird gerade 1 Thlr. seyn. Nun empfängt der lezte nothwendig $\frac{8}{9}$ desjenigen Rests, von dem der vorlezte $\frac{1}{9}$ hinwegnahm. Da nun $\frac{1}{9}$ dieses Rests 1 Thlr. ist, so empfangt also der lezte 8 Thlr. Er empfängt aber auch so viele Thaler, als Erben sind: mithin sind es 8 Erben, von denen jeder 8 Thaler erhält. Die ganze Erbschaft beträgt daher 64 Thaler.

Die vorige Anmerkung gilt auch bei dieser Aufgabe, die nichts als eine Nachahmung der vorhergehenden ist.

Zur Übung versuche man beide Aufgaben durch allgemeine Bestimmungen aufzulösen.

67.

Ein reicher Mann sezte in seinem Testamente ein Kapital aus, wovon die Kirche, das Armenhaus und das Gymnasium, welches aus dem Rector, Conrector und 9 Schulkollegen bestand, folgende Antheile erhalten sollten: Die Kirche bekam den fünften Theil vom ganzen Kapital. Von dem Überrest empfieng das Armen=

haus den dritten Theil; der Rector sollte von dem Übrigen den fünften und der Conrector von dem Übrigen den achten Theil haben; die übrigen 5936 Thlr. sollten aber unter die 9 Schulkollegen so vertheilt werden, daß vom ersten bis zum lezten der folgende immer 30 Thlr. weniger bekäme. Man fragt, wie groß das Kapital gewesen, und was Jeder bekommen?

Auflösung:

Da von dem Ganzen nach einander der fünfte, dritte, fünfte und achte Theil genommen werden, so nehme man an, das Kapital sey ein solches vielfaches x, das sich durch 5, 3, 5, 8 ohne Rest theilen läßt; also 600x.

Nun bekommt die Kirche $\frac{1}{5}$ des Ganzen, oder 120x, und der Überrest ist: . . . . 480x, von diesem Überrest erhält das Armenhaus $\frac{1}{3}$ oder 160x.
Der Überrest ist: . . . . 320x.
Hiervon erhält der Rector $\frac{1}{5}$ oder . . . . . 64x.
Der Überrest ist: . . . . 256x.
Von diesem bekommt der Conrector $\frac{1}{8}$ oder . 32x.
Der Überrest ist: . . . . 224x.
Nun bleiben aber 5936 Thlr. übrig; mithin ist 224x = 5936. Hieraus folgt $x = \frac{5936}{224} = 26\frac{1}{2}$, und mithin ist 600x oder das unbekannte Kapital 15900.

Jezt kommt es noch darauf an, die 5936 übrigen Thaler unter 9 Personen also zu vertheilen, daß (von dem geringsten angerechnet) jeder folgende immer 30 Thlr. mehr bekomme, als der andere. Man hat also abermal eine Progression von 9 Gliedern, deren Unter-

schied 30, und Summe aller Glieder 5936 ist. Es findet sich aber die Summe aller Glieder, wenn man die Summe des ersten und lezten mit der halben Anzahl der Glieder multipliziret; daher ist 5936 = dieser Summe des ersten und lezten Glieds, multiplizirt mit $\frac{9}{2}$, mithin ist die Summe des ersten und lezten Glieds = $\frac{2}{9}$. 5936 oder = $1319\frac{1}{9}$. Es ist nun aber ferner das lezte Glied jeder arithmetischen Progression gleich dem ersten, vermehrt um das Produkt aus der Anzahl der Glieder weniger 1, (hier 8) in die Differenz (hier 30). Folglich ist die Summe des ersten und lezten Glieds dieser Progression = dem doppelten ersten Glied, vermehrt um 240. Diese Summe ist aber auch $1319\frac{1}{3}$. Mithin ist $1319\frac{1}{9}$ gleich dem doppelten ersten Glied, vermehrt um 240. Zieht man also von $1319\frac{1}{9}$, 240 ab, und halbirt den Überrest, so hat man das erste Glied, welches demnach $539\frac{5}{9}$. Dieß erhält der lezte. Der erste aber bekommt $539\frac{5}{9} + 8 \cdot 30$ oder $779\frac{5}{9}$ Thlr.

68.

24 gute Groschenstücke gelten 1 Thaler, und 6 Viergutegroschenstücke auch 1 Thlr. Nun möchte gern Jemand von beiden Münzsorten 15 Stück für 1 Thaler haben. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung:

Es seyen x Viergutegroschenstücke: Da nun 6 derselben 1 Thlr. werth sind, so gelten diese x Stücke $\frac{x}{6}$ Thlr.

Sind aber unter 15 Stücken x von der ersten Gattung, so bleiben für die zweite noch 15 — x Stücke. Von diesen gelten 24 einen Thlr., mithin ist der Werth dieser 15 — x Stücke: $\frac{15 - x}{24}$ Thlr. Beiderlei Sorten sollen aber zusammen 1 Thlr. werth seyn, daher ist $\frac{x}{6} + \frac{15 - x}{24} = 1$, woraus $x = 3$ folgt. Also braucht man 3 Viergutegroschenstücke und 12 Gutegroschenstücke.

Eben so löset sich auch die folgende Aufgabe auf.

69.

Ein Wechsler hat zweierlei Münzen. Von der ersten gelten 10 Stück 1 Thlr., von der andern 20 Stück 1 Thlr. Nun verlangt Jemand 17 Stück für 1 Thlr. Wie viel bekommt er von jeder Sorte?

70.

Man hat einige Pfunde Waaren. Verkauft man 1 Pfund für $4\frac{7}{8}$ Thlr., so verliert man auf alle Pfunde $2\frac{1}{2}$ Thlr. Verkauft man 1 Pfund für 5 Thlr., so gewinnt man auf alle Pfunde 10 Thlr. Wie viel Pfunde hat man?

Auflösung:

Dadurch, daß man das Pfund für 5 Thlr., anstatt für $4\frac{7}{8}$ Thlr., also um $\frac{1}{8}$ Thlr. theurer verkauft, gewinnt man, gegen den ersten Verkauf à $4\frac{7}{8}$ Thlr., so vielmal $\frac{1}{8}$ Thlr., als Pfunde verkauft werden. Anderer Seits erkennt man diesen Gewinn erstlich aus den $2\frac{1}{2}$ Thlr. des vorigen Verlusts, die durch diesen zweiten

Verkauf getilgt werden, und dann noch aus den in eben diesem Verkauf erworbenen 10 Thlr., mithin im Ganzen aus $12\frac{1}{2}$ Thlr. Folglich ist $\frac{1}{8}$mal die Anzahl der unbekannten Pfunde $= 12\frac{1}{2}$ oder $= \frac{25}{2}$, und daher diese Anzahl selbst $= 8$mal $\frac{25}{2}$ oder $= 4 \cdot 25 = 100$.

71.

Eine Frau will aus einigen Pfunden Flachs ein Stück Leinewand spinnen lassen. Ihre erste Magd erklärt sich, daß sie in 36 Tagen damit fertig werden wolle. Die zweite gebraucht 48 Tage dazu. Da sie aber bald fertig seyn muß, so geht sie mit beiden Mägden daran, und verspinnet täglich noch $\frac{1}{8}$ Pfund mehr, als die zweite Magd, daher werden sie gerade in 8 Tagen fertig. Wie viel Pfunde Flachs waren es?

Auflösung:

Da die erste Magd das Ganze in 36 Tagen allein spinnen würde, so spinnt sie, nach diesem Verhältniß, in 8 Tagen nur $\frac{8}{36}$ oder $\frac{2}{9}$ des Ganzen. Eben so spinnt die zweite Magd, die das Ganze allein in 48 Tagen vollenden könnte, nach diesem Verhältniß in 8 Tagen nur $\frac{8}{48}$ oder $\frac{1}{6}$ des Ganzen. Die Frau aber spinnt täglich so viel als die zweite Magd, und $\frac{1}{8}$ Pfund, also in 8 Tagen ebenfalls so viel, als die zweite Magd binnen dieser Zeit, und noch überdieß 1 Pfund.

Alle drei spinnen also in 8 Tagen $\frac{2}{9}$ und $\frac{2}{6}$ des Ganzen, und noch 1 Pfund, oder $\frac{5}{9}$ des Ganzen und 1 Pf. Da nun von Allen das Ganze gesponnen wird, so ist

1 Pfund also $\frac{4}{9}$ des Ganzen, also ist $\frac{1}{4}$ Pfund $\frac{1}{9}$ des Ganzen, und dieses also $\frac{9}{4}$ Pfund.

72.

Es hat Jemand 6 Jahre in Besoldung gestanden, und in den 3 ersten Jahren 300 Thlr. jährlich ausgegeben, mit jedem folgenden Jahre aber immer 100 Thlr. mehr, das übrige aber erspart, und sich ein Kapital von 2600 Thlr. erworben. Was war seine jährliche Besoldung?

Auflösung:

Seine Ausgaben in 6 Jahren und sein Erspartes binnen dieser Zeit zusammen gerechnet, machen seine 6jährige Besoldung aus. Wenn man also jene Summe in 6 gleiche Theile theilet, so ist der Quotient die jährliche Besoldung. Nun betragen aber seine Ausgaben in 6 Jahren zusammen 300 + 300 + 300 + 400 + 500 + 600, oder 2400 Thlr. Das Ersparte aber ist 2600. Also machen die Ausgaben und die Ersparniß in 6 Jahren zusammen die Summe von 5000 Thlr. Daher ist die jährliche Besoldung der sechste Theil hiervon, oder $833\frac{1}{3}$ Thlr.

73.

Jemand wurde gefragt, wie viel Zinsen er jährlich von einem gewissen Kapital erhalte, das zu 4 pro Cent stehe. Er antwortete: Dividire den fünften Theil des unbekannten Kapitals durch die unbekannten Zinsen eines Jahrs, und addire 9 Thlr. zum Quotienten, so erhältst du die Zinsen des Kapitals in Thlr. Welches sind diese jährlichen Zinse?

Auflösung:

Das unbekannte Kapital verhält sich zu seinem jährlichen Zins wie 100 zu 4. Mithin ist auch dieß Kapital durch seinen jährlichen Zins dividirt gleich 100 durch 4 dividirt, d. i. gleich 25. Mithin ist $\frac{1}{5}$ des Kapitals durch des Kapitals Zins dividirt gleich 5 Thlr. Nun soll man, nach der Vorschrift zu diesen 5 noch 9 Thlr. addiren, um den jährlichen Zins dieses Kapitals zu erhalten. Derselbe ist demnach 14 Thlr. Das Kapital selbst aber ist 350 Thlr.

74.

Ein Kapital ist zu 5 pro Cent verliehen. Nach 5 Jahren erhält man 2000 Thlr., welche das Kapital mit den 5jährigen Zinsen sind. Wie groß war das Kapital?

Auflösung:

Auch diese Aufgabe läßt sich ohne Algebra durch die gewöhnliche Rechenkunst vermittelst einer einzigen Proportion also auflösen:

100 Thlr. wachsen in 5 Jahren, zu 5 pro Cent gerechnet, mit Kapital und Zins auf 125 Thlr. an.

Also schließe man: wenn 125 Thlr. in 5 Jahren aus dem Kapital 100 entstehen, aus welchem Kapital entspringen die 2000 Thlr. binnen eben dieser Zeit? oder: $125 : 100 = 2000 :$ der gesuchten Zahl x, mithin $x = 1600$ Thlr. Diese Summe also wächst, zu 5 pro Cent, in 5 Jahren mit ihren Zinsen auf 2000 Thlr. an.

75.

Man sucht ein Kapital, welches, wenn es zu 4 pro Cent angelegt wird, in 20 Jahren mit den 20jährigen Zinsen 500 Thlr. ausmacht.

Auflösung:

100 fl. Kapital, zu 4 pro Cent, tragen in 20 Jahren 80 fl. Zins, und wachsen also auf 180 fl. an: Daher giebt folgende Proportion das gesuchte:

180 : 100 = 500: dem unbekannten Kapital. Dieses ist also $277\frac{7}{9}$ Thlr.

76.

Einer wollte ein Landgut um baares Geld kaufen, und kündigte daher jedem seiner Schuldner 200 Thlr. auf. Da hatte er aber 700 Thlr. mehr Geld beisammen, als er zu diesem Zwecke brauchte. Würde er aber jedem 150 Thlr. aufkündigen, so fehlten ihm noch 1100 Thlr. hierzu. Wie viel muß er also jedem aufkündigen, um den Kaufschilling zusammen zu bringen?

Auflösung:

Das Aufkündigen von 200 Thlrn. anstatt 150 für jeden Schuldner, bewirkt einen Unterschied, der so vielmal 50 Thlr. beträgt, als Schuldner vorhanden sind. Anderer Seits erkennt man diesen Unterschied aber auch erstlich aus den bei der Aufkündigung von 150 im Ganzen fehlenden 1100, die durch die vermehrte Aufkündigung ergänzt werden, und dann noch aus den vermittelst eben dieser Aufkündigung überdieß übrig bleibenden 700, im Ganzen also aus der Summe von 1800 Thlrn. Folglich ist 50mal die Anzahl der Schuldner 1800, und diese Anzahl also $\frac{1800}{50}$ oder 36.

Es ist also der Kaufschilling 150 . 36 + 1100, nämlich 6500 Thlr., welche in 36 gleiche Theile getheilt,

für jeden Schuldner die ihn treffende Summe $\frac{6500}{36}$ oder $180\frac{5}{9}$ Thlr. betragen, die demnach jedem einzelnen aufzukündigen sind.

77.

Ich kaufte vieles Tuch, 5 Ellen für 7 Thlr., und verkaufte es wieder, 7 Ellen für 11 Thlr. Bei dem Handel habe ich 100 Thlr. gewonnen. Wie viel Ellen sind es gewesen?

Auflösung:

Diese Aufgabe läßt sich sehr leicht durch eine falsam positionem ohne Algebra auflösen. Man nehme zu dem Ende an, es seyen z. B. 350 Ellen gewesen. Da nun beim Einkauf 5 Ellen 7 Thlr. kosteten, so wurden diese 350 Ellen erkauft um 490 Thlr. Da ferner beim Verkauf 7 Ellen 11 Thlr. kosteten, so wurden aus eben diesen 350 Ellen erlöset 550 Thlr., mithin ist der Gewinn, wenn man 350 Ellen annimmt, 60 Thlr. Nun schließe man also: Mit 350 Ellen gewinnt man 60 Thlr. Mit wie viel Ellen also gewinnt man 100 Thlr.? Auf diese Art finden sich sodann $583\frac{1}{3}$ Ellen.

78.

Es will Jemand Rocken, wovon der Scheffel 2 Thlr. und Gerste, wovon der Scheffel $1\frac{1}{4}$ Thlr. kostet, dergestalt vermischen, daß 1 Scheffel dieses vermischten Getraides auf $1\frac{1}{2}$ Thlr. zu stehen kommt. Wie viel muß er von jeder Gattung zu 1 Scheffel desselben nehmen?

Auflösung:

Gesetzt, man nehme $\frac{1}{x}$ Scheffel Rocken; so muß man also $1 - \frac{1}{x}$ oder $\frac{x-1}{x}$ Scheffel Gerste nehmen. Da nun 1 Scheffel Rocken 2 Thlr. kostet, so kostet $\frac{1}{x}$ Scheffel $\frac{2}{x}$ Thlr. Und da ferner 1 Scheffel Gerste $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ Thlr. kostet, so kostet $\frac{x-1}{x}$ Scheffel $\frac{5(x-1)}{4x}$ Thlr. Nun soll aber 1 Scheffel dieses gemischten Getraides $1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ Thlr. gelten; daher ist $\frac{2}{x} + \frac{5(x-1)}{4x} = \frac{3}{2}$, woraus $x = 3$ folgt. Also muß man $\frac{1}{3}$ Scheffel Rocken, und mithin $\frac{2}{3}$ Scheffel Gerste nehmen.

Eben so löset sich folgende Aufgabe auf.

79.

Ein Goldschmidt hat 14löthiges und 11löthiges Silber, und will aus beiden 8 Mark 12löthiges Silber zusammen mischen. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

80.

Harpax zählte seine Dukaten auf ein Quadrat. Als dieses voll war, blieben 284 Stück übrig. Darauf legte er 1 Dukaten mehr in jede Reihe, und machte ein Quadrat, und nun fehlten ihm, um dasselbe völlig zu machen, 25 Stück. Wie viel Dukaten hatte er?

Auflösung:

Den Unterschied beider Quadrate erkennt man daraus, wie viel Dukaten das größere mehr fassen kann, als

das kleine. Nun faßt aber jenes nicht nur die 284 Stücke, die das kleine nicht mehr aufnehmen kann, sondern auch noch 25 weiter, um die der Vorrath zu wenig war; das ist: dieser Unterschied beider Quadrate ist 309. Sodann, von einer andern Seite, ist aber auch der Unterschied zweier Quadrate, deren Seiten oder Wurzeln um eine Einheit verschieden sind, gleich der doppelten Seite des kleineren, vermehrt um 1. Folglich ist die doppelte Seite des kleineren Quadrats, vermehrt um 1, gleich 309, also diese doppelte Seite 308, und die Quadratseite selbst 154. Das Quadrat hiervon ist 23716, und mithin die Anzahl der Dukaten 23716 und 284 oder 24000 Stücke.

81.

A, B, C machen im Handel Gesellschaft. B legt 60 Thlr. mehr an, als A; B und C bringen 600 Thlr. zusammen. Alle drei gewinnen mit einander 320 Thlr. davon gebühren C 136 Thlr. Wie viel hat Jeder eingelegt?

Auflösung:

Es sey die Einlage von A		$= x$,
so ist die von	B	$= x + 60$,
	C	$= 540 - x$,
und Summe der Einlagen von allen		$= x + 600$.
Ferner ist der Gewinn aller . .		$= 320$.
Der Gewinn von C		$= 136$.

Nun verhält sich die Einlage aller : Gewinn aller = die Einlage von C : Gewinn von C, mithin auch:

Einlage aller + Einlage von C: Gewinn aller + Gewinn von C = Einlage aller: Gewinn aller, oder:

$$1140 : 456 = x + 600 : 320.$$

mithin ist $x + 600 = \frac{1140 \cdot 320}{456} = 800$, und daher $x = 200$, woraus sich die übrigen unbekannten Größen ergeben.

82.

Einem Boten, der jede Stunde $\frac{1}{2}$ Meile geht, wird ein anderer Bote nachgeschickt, der in jeder Stunde $\frac{3}{4}$ Meile zurücklegt, da der erste schon 5 Meilen voraus hat. In wie viel Stunden wird der lezte den ersten einholen?

Auflösung:

Der erste Bote hat voraus 5 Meilen. Nun gehe er, bis er vom zweiten eingeholt wird, noch $4x$ Stunden. Da er nun in jeder Stunde $\frac{1}{2}$ Meile zurücklegt, so macht er in diesen $4x$ Stunden, da ihm der zweite nachgeht, $2x$ Meilen. Mithin ist sein ganzer Weg $5 + 2x$ Meilen.

Der zweite Bote geht $4x$ Stunden, bis er den ersten einholt. Nun macht er jede Stunde $\frac{3}{4}$ Meilen; also in $4x$ Stunden $3x$ Meilen. Es muß aber sein Weg dem des ersten Boten gleich seyn, wenn er ihn, von einerlei Orte ausgehend, einholen soll. Daher ist $3x = 5 + 2x$, also $x = 5$. Folglich geschiehet diese Einholung nach $4x$, d. i. nach 20 Stunden.

Eben so lösen sich folgende Aufgaben auf.

83. 84.

Ein Bote, der täglich 7 Meilen geht, wird nach 8 Tagen einem andern Boten, der täglich 5 Meilen geht, nachgeschickt. In wie viel Tagen holt der zweite den ersten ein? und in welcher Meile wird dieß geschehen?

85. 86.

Zwei Boten, die 360 Meilen von einander entfernt sind, gehen zu gleicher Zeit ab, und gegen einander; der eine täglich 5, der andere 3 Meilen. An welchem Tage und auf welcher Meile begegnen sie sich?

Auflösung:

Beide machen täglich zusammen 8 Meilen. Um gemeinschaftlich 360 zurückzulegen, brauchen sie also $\frac{360}{8}$ oder 45 Tage, innerhalb deren der erste 225, der andere aber 135 Meilen macht.

87.

Jemand verleihet ein Kapital von 500 Thalern zu 4 pro Cent. Nach $3\frac{1}{2}$ Jahren verleihet er ein anderes Kapital von 480 Thlrn. zu 5 pro Cent. Die Zinsen von beiden laufen mit einander fort. Nach wie viel Jahren haben beide Kapitale gleichviel Zinsen eingebracht?

Auflösung:

Der jährliche Zins von 500 Thlr., zu 4 pro Cent, ist 20 Thlr., mithin ist er in $3\frac{1}{2}$ Jahren 70 Thlr., und in den noch übrigen unbekannten Jahren beträgt derselbe so vielmal 20, als solcher Jahre sind. Eben so ist der

jährliche Zins von 480 Thlr., zu 5 pro Cent, 24 Thlr. und in denselben unbekannten Jahren 24mal die Anzahl dieser Jahre. Da nun beide Zinsen gleich seyn sollen: so müssen so viele Jahre gefunden werden, daß 20mal dieselben und 70 gleich 24mal diese Jahre sind. Folglich ist 70 gleich 4mal die unbekannte Anzahl von Jahren, und diese ist also $\frac{1}{4}$ von 70 oder $17\frac{1}{2}$.

88.

Ein Mann schreibt täglich 5 Bogen. Nachdem er schon 5 Tage gearbeitet, fängt ein anderer, der täglich 7 Bogen schreibt, zu arbeiten an. Wie viel Bogen hat Jeder geschrieben, wenn beider Arbeit gleich ist?

Auflösung:

Der zweite schreibt täglich 7, das ist $5 + 2$ Bogen. Mit dem Theil 5 Bogen arbeitet er mit dem ersten gleich. Mit dem Theil 2 Bogen aber soll er, nach dem Sinn der Aufgabe, die 25 Bogen tilgen, die der erste voraus hat, und hierzu braucht er demnach $\frac{25}{2}$ oder $12\frac{1}{2}$ Tage. Mithin nach $12\frac{1}{2}$ Tagen sind beider Arbeiten gleich, und betragen von jedem 175 Bogen.

89.

Man verleihet zu gleicher Zeit zwei Kapitale, eines von 500 Thlr. zu 4 pro Cent, das andere von 600 Thlr. zu 5 pro Cent. In wie viel Jahren werden beide Kapitale zusammen 125 Thlr. Zinsen bringen?

Auflösung:

Der jährliche Zins des ersten Kapitals ist 20, und des andern 30 Thlr., also von beiden zusammen 50 Thlr.

Zu einem Zins von 50 Thlrn. brauchen also beide vereinigte Kapitalien 1 Jahr; daher werden sie zu einem Zins von 125 oder von $2\frac{1}{2}$mal 50 nothwendig $2\frac{1}{2}$ Jahr nöthig haben.

90.

Zwei Maurer haben eine Mauer, die 1000 Kubikfuß hält, zusammen verfertiget. Einer hat täglich 30, der andere in 3 Tagen 100 Kubikfuß gemacht. Für wie viel Fuß muß nun jeder bezahlt werden?

Auflösung:

A verfertiget also täglich . . 30 Fuß.
B in 3 Tagen 100, also täglich $33\frac{1}{2}$.
Summe: $63\frac{1}{2}$.

Nun schließe man also:

Unter $63\frac{1}{2}$ Kubikschuh, welche beide gemeinschaftlich verfertigen, sind 30 von A verfertigte. Wie viel befinden sich also unter 1000 gemeinschaftlich verfertigten, die A gemacht hat? Dadurch findet sich das vierte Glied dieser Proportion, nämlich die Anzahl der Kubikschuhe von A gleich $473\frac{13}{19}$. Eben so schließe man bei B:

$63\frac{1}{2} : 33\frac{1}{2} = 1000$: zur Anzahl der von B verfertigten Kubikschuhe, welche $= 526\frac{6}{19}$ gefunden wird.

91.

Ein Fleischer verdingt 20 Ochsen 12 Monate lang in die Fütterung. Nach 2 Monaten schickt er noch 5 dazu, und nachdem diese zusammen $6\frac{3}{5}$ Monate lang

gefüttert worden, noch 10 Stück. Wie lange werden sie für das bedungene Geld gefüttert werden?

Auflösung:

20 Ochsen auf 12 Monate in die Fütterung geben, ist eben so viel, als 20mal 12, das ist: 240 Ochsen 1 Monat lang füttern lassen.

Nun waren 2 Monate lang 20 Ochsen allein, dieß ist also eben so viel, als wenn 2.20 oder 40 Ochsen die 2 ersten Monate gefüttert worden wären. Ferner $6\frac{3}{5}$ Monat waren es mit den 5 dazu gekommenen 25 Stücken, und diese kosten also eben so viel zu erhalten, als 25mal $6\frac{3}{5}$ oder 165 auf 1 Monat. Mithin wurden bereits 40 und 165, das ist 205 Ochsen 1 Monat lang gefüttert. Nun sind aber, nach der Bedingung, 240 derselben 1 Monat zu füttern. Es dürfen also außer diesen noch 240 — 205, das ist, 35 auf 1 Monat angenommen werden. Dieß giebt zu den bereits vorhandenen 25 noch 10 Stücke. Die Zeit aber, die der so eben angeführten Anzahl gleich gehalten werden kann, ist $2 + 6\frac{3}{5} + 1$, d. i. $9\frac{3}{5}$ Monat.

92.

Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber alle Jahre zu Erhaltung seiner Familie 100 Thlr. davon weg, und wird nach 3 Jahren noch einmal so reich, als er anfangs war. Wie viel hat er anfangs gehabt?

Auflösung:

Da das unbekannte Vermögen dreimal nach einander um den dritten Theil vermehrt wird, und außerdem jedesmal 100 Thlr. davon abgehen, so setze man, dasselbe sey anfänglich gewesen . . . . . $27x + 300$.

Dieses vermehrt er um den dritten Theil $9x + 100$	$9x + 100$.
Summe:	$36x + 400$.
Er nimmt 100 davon	100.
Rest:	$36x + 300$.
Diesen Überrest vermehrt er abermal um den dritten Theil	$12x + 100$.
Summe:	$48x + 400$.
Er nimmt wieder 100 davon	100.
Rest:	$48x + 300$.
Auch diesen Überrest vermehrt er um den dritten Theil	$16x + 100$.
Summe:	$64x + 400$.
Er nimmt abermals 100 davon . . .	100.
Rest:	$64x + 300$.

Und ist nun noch so reich, als anfangs, da er $27x + 300$ hatte; mithin haben wir $64x + 300 = 54x + 600$, woraus $x = 30$ folgt. Das anfängliche Vermögen war also $27 . 30 + 300$ oder 1110 Thlr.

II.

Einfache Gleichungen, worin mehrere unbekannte Größen vorkommen.

Anmerkung: Hier ist zu bemerken, daß, so viel immer möglich ist, alles auf eine einzige unbekannte Größe zurück geführt werden muß.

93.

Zwei Leute aßen Eier zusammen. A sagte: Giebst du mir zwei von deinen, so habe ich so viel, als du. B antwortet: Giebst du mir zwei von den deinen, so hab ich noch einmal so viel als du? Wie viel hatte ein Jeder?

Auflösung:

Da B 2 abgeben soll, so nehme man an, er habe anfänglich $x + 2$ gehabt. Giebt er hiervon 2 ab, so bleiben ihm x übrig. Eben so viel hat nun auch A, nachdem er von B 2 bekommen; also hatte er vorher $x - 2$. Nun haben wir noch die zweite Bedingung zu erfüllen, nach welcher B, wenn er von A 2 erhält, doppelt so viel hat, als A übrig bleiben. Bekommt nun B zu seinen $x + 2$ von A noch 2, so hat er $x + 4$, A aber behält $x - 4$ übrig, und da $x + 4$ das doppelte von $x - 4$ seyn soll, so ist also $x + 4 = 2x - 8$, und mithin $x = 12$. Daher hat A $x - 2$ oder 10, und B $x + 2$ oder 14 Eier gehabt.

94.

Einer hat 2 Tabatieren. Legt er in die erste 10 Thlr., so ist sie noch einmal so viel werth, als die andere; legt er aber diese 10 Thlr. in die andere, so sind beide gleich viel werth. Wie groß ist der Werth einer jeden?

Auflösung:

Der Werth der ersten Tabatiere sey $2x - 10$. Legt man nun in diese 10 Thlr., so ist ihr Werth $2x$, und da dieser doppelt so groß seyn soll, als der Werth der zweiten, so ist dieser leztere x Thlr. Nun ist noch übrig, daß eben dieser Werth der zweiten, um 10 vermehrt, dem der ersten Tabatiere gleich ist. Daher muß $x + 10$ gleich $2x - 10$, und also $x = 20$ seyn. Folglich sind die Werthe beider Tabatieren, oder $2x - 10$ und x nun 30 und 20 Thlr.

Anders (indem man mit der zweiten Bedingung anfängt): Da die zweite Tabatiere, wenn ihr Werth um 10 vermehrt wird, so theuer, als die erste ist; so sey dieser Werth der zweiten $x - 10$, mithin wird der der ersten x seyn müssen. Nun muß aber auch noch der Werth der ersten, um 10 vermehrt, doppelt so groß seyn, als der der zweiten. Aber der Werth der ersten um 10 vermehrt, ist $x + 10$; folglich muß $x + 10$ das Doppelte von $x - 10$, und also gleich $2x - 20$ seyn. Hieraus folgt $x = 30$. Dieß ist der Werth der ersten. Der der anderen ist $x - 10$ oder 20.

95.

A sagt zu B: Hätte ich 10 Thlr. mehr, als ich habe, so hätte ich so viel als du. B erwiedert: Hätte

ich 15 Thlr. mehr, als ich habe, so hätte ich doppelt so viel, als du. Wie viel Thlr. hatte ein Jeder?

Auflösung:

Man nehme an, A habe x — 10 Thlr. Bekommt er 10, so hat er x Thlr., und so viel als B, mithin hat B x Thlr. Nun ist noch übrig, daß der Antheil von B, um 15 vermehrt, noch so viel sey, als der von A. Aber jener, um 15 vermehrt, ist x + 15. Dieß muß also 2x — 20 seyn. Folglich ist x = 35. Also hat A 25 Thlr. und B 35 Thlr.

96.

In einer Familie waren mehrere Kinder. Auf die Frage, wie groß die Zahl sey, antwortete der älteste Sohn: Ich habe so viel Schwestern, als Brüder; die älteste Tochter aber sagte: Ich habe nur halb so viel Schwestern, als Brüder. Wie viel waren es Söhne und Töchter?

Auflösung:

Es sey, um mit der zweiten Erwiederung anzufangen, die Anzahl der Töchter x + 1, so hat die älteste Tochter x Schwestern, und da, nach ihrer Äußerung, diese Zahl nur halb so groß, als die der Brüder ist, so sind es demnach 2x Söhne. Der älteste Sohn hat also 2x — 1 Brüder. Nun hat derselbe eben so viel Schwestern, als Brüder; folglich ist x + 1 = 2x — 1, und mithin x = 2. Es sind also x + 1 oder 3 Töchter, und 2x oder 4 Söhne.

Anmerkung: Zur Übung lasse man auch mit der ersten Erwiederung anfangen.

Anders: Da der älteste Sohn eben so viel Schwestern, als Brüder hat, so ist die Anzahl der Söhne um 1 größer, als die der Töchter; mithin auch die doppelte Anzahl der Söhne um 1 mehr, als die Anzahl aller Kinder.

Da ferner die älteste Tochter halb so viel Schwestern, als Brüder hat, so ist die Anzahl der Söhne, um ihre Hälfte vermehrt, d. i. $\frac{3}{2}$ der Anzahl der Söhne, um 1 kleiner, als die Anzahl aller Kinder.

Wenn aber von zwei Größen die eine um 1 größer, die andere um 1 kleiner, als eine gewisse dritte ist; so ist der Unterschied jener zwei Größen gleich 2.

Folglich ist auch der Unterschied von 2mal der Anzahl der Söhne, und von $\frac{3}{2}$mal eben dieser Anzahl gleich 2. Anderer Seits ist dieser Unterschied auch $\frac{1}{2}$mal die Anzahl der Söhne. Folglich ist $\frac{1}{2}$mal die Anzahl der Söhne gleich 2, und mithin die Anzahl der Söhne gleich 4. Da nun diese Anzahl um 1 größer ist, als die der Töchter, so ist diese leztere gleich 3.

97.

A und B sind 600 Thlr. schuldig. Keiner von beiden kann sie allein bezahlen; deswegen sagt A zu B: Gieb mir $\frac{3}{4}$ deines Gelds zu meinem, so kann ich die Schuld bezahlen. B sagt zu A: Gieb mir die Hälfte deines Gelds zu meinem, so will ich sie entrichten. Wie viel Geld hatte Jeder?

Auflösung:

Da B $\frac{3}{4}$ seines Gelds abgeben soll, so wollen wir annehmen, er habe 8x Thlr. gehabt. Hiervon ist $\frac{3}{4}$

gleich 6x. So viel giebt also B an A ab, und da A nun mit diesem 600 hat, so hatte er vorher, eh er die 6x bekam, 600 — 6x. Jetzt muß aber auch noch, nach der zweiten Forderung, die Hälfte von A zu B addirt, 600 seyn. Jene ist nun 300 — 3x, und diese 8x, daher ist 300 + 5x = 600, und mithin x = 60. Es hat also A 600 — 6 . 60 oder 240 Thlr. und B 8 . 60 oder 480 Thlr.

Anmerkung: Zur Übung fange man auch hier mit der Äußerung von B an.

98.

Ein Maulesel und ein Esel beschwerten sich über die Lasten, die sie trugen. Der Esel sagte zum Maulesel: Wenn du mir einen Zentner von deiner Last gäbst, so hätte ich 2mal so viel, als du behieltest. Der Maulesel antwortete: Wenn du mir einen Zentner von deiner Last gäbst, so hätte ich 3mal so viel, als du behieltest. Wie viel Zentner hatte Jeder?

Auflösung:

Da der Maulesel 1 Zentner von seiner Last abgeben soll, so nehme man an, diese sey gewesen x + 1 Zentner. Giebt er hiervon 1 Zentner ab, so bleiben ihm x Zentner übrig. Nun behauptet der Esel mit dem erhaltenen Zentner doppelt so viel zu haben, als dem Maulesel bleiben. Also hat der Esel, nachdem er 1 Zentner empfangen, 2x, mithin hatte er vor dem Empfange desselben 2x — 1 Zentner. Jetzt ist noch die zweite Bedingung übrig, nach welcher der Maulesel, wenn er vom Esel 1 Zentner bekommt, 3mal so viel

haben muß, als dem Esel übrig bleiben. Bekommt nun aber der Maulesel zu seiner Last $x + 1$ noch 1 Zentner, so hat er $x + 2$ Zentner: und giebt der Esel von seinen $2x - 1$ Zentnern noch 1 Zentner ab, so behält er $2x - 2$ übrig. Jene Summe muß nun dieses Überrests Dreifaches seyn; daher ist $x + 2 = 6x - 6$, also $5x = 8$ und $x = 1\frac{3}{5}$. Folglich hatte der Maulesel $x + 1$ oder $2\frac{3}{5}$ Zentner, und der Esel $2x - 1$ oder $2\frac{1}{5}$ Zentner.

Man kann auch hier, zur Übung, mit der zweiten Bedingung anfangen.

99.

Zwei Studenten hatten Äpfel gekauft, und theilten ihrer Aufwärterin davon mit. A gab ihr $\frac{1}{5}$ seines Vorraths; B $\frac{1}{7}$ des seinigen: Da fand sich's dann, daß die Aufwärterin von beiden 20 Stück bekommen hatte, und jeder Student gleich viel behielt. Wie viel hatte nun Jeder anfangs?

Auflösung:

Der erste Student, der $\frac{1}{5}$ seines Vorraths abgeben muß, habe $5x$. Da er nun hiervon der Aufwärterin den fünften Theil abgibt, so erhält diese x, und ihm bleiben $4x$ Stücke übrig. Es erhält aber die Aufwärterin von beiden Studenten 20 Stück, und da ihr A x gab, so empfieng sie also von B $20 - x$ Stücke. Nun gab ihr, nach der Bedingung, B den $\frac{1}{7}$ Theil seines Vorraths. Also ist $20 - x$ der $\frac{1}{7}$ Theil des Vorraths von B; mithin der ganze Vorrath von B 7mal $(20 - x)$. Giebt aber B $\frac{1}{7}$ seines Vorraths ab, so bleiben ihm $\frac{6}{7}$ desselben, also $6(20 - x)$ übrig. Beide

Studenten behalten aber, nach der Bedingung der Aufgabe, gleiche Überreste. Daher muß $4x$, als Überrest des Vorraths von A, gleich $6.(20-x)$ seyn, woraus $x = 12$ folgt. Demnach ist der Vorrath von A, oder $5x = 60$, und der von B oder $7(20-x) = 56$.

Man kann auch mit dem Studenten B anfangen.

100.

Es hat Jemand zwei silberne Becher und einen Deckel dazu. Der eine Becher ist 12 Loth schwer, und wiegt mit dem Deckel doppelt so viel, als der andere Becher. Der andere Becher wiegt mit dem Deckel dreimal so viel, als der erste. Wie schwer ist nun der Deckel und der andere Becher?

Auflösung:

Der Deckel sey $2x$ Loth schwer. Da nun dieser mit dem ersten Deckel, welcher 12 Loth wiegt, doppelt so schwer ist, als der andere Becher, so muß dieser $x + 6$ Loth wägen. Jetzt ist noch übrig, daß der andere Becher und Deckel zusammen 3mal so schwer sind, als der erste Becher. Nun wiegt aber der andere Becher und Deckel zusammen $3x + 6$. Dieß also muß dem dreifachen Gewicht des ersten Bechers, nämlich 36, gleich seyn. Folglich ist $x = 10$. Es wiegt also der erste Becher 12 Loth, der zweite $x + 6$ oder 16 Loth, und der Deckel $2x$ oder 20 Loth.

Zur Übung nehme man das Gewicht des andern Bechers als die unbekannte Größe an.

Anders: Da der Deckel und zweite Becher 3mal so schwer sind, als der erste Becher, so wägen diese beide

3mal 12 oder 36 Loth, mithin beide Becher, samt dem Deckel 48 Loth. Nun aber wiegt der erste Becher und Deckel doppelt so viel, als der andere Becher, mithin wägen auch beide Becher, samt dem Deckel 3mal so viel, als der zweite Becher. Da sie nun alle zusammen 48 Loth wägen, so ist dieß also das 3fache Gewicht des zweiten Bechers. Folglich wiegt der zweite Becher 16 Loth, woraus sich das Gewicht des Deckels leicht finden läßt.

101.

Einer kauft 20 Pfund Rosinen und 24 Pfund Pflaumen um $2\frac{1}{4}$ Thlr. oder 54 Ggr. Ein anderer kauft, um denselben Preis, 24 Pfund Rosinen und 30 Pf. Pflaumen für $3\frac{3}{4}$ Thlr. oder 66 Ggr. Wie viel kostet das Pfund von jeder Gattung?

Auflösung:

Diese und ähnliche Beispiele lassen sich am leichtesten auf folgende Art auflösen:

Es kosten: 20 lb. Rosinen + 24 lb. Pf. 54 Ggr. also auch 5 lb. Ros. + 6 lb. Pf. $13\frac{1}{2}$ Ggr. (A.

Eben so: 24 lb. Rosinen + 30 lb. Pf. 66 Ggr. also auch 4 lb. Ros. + 5 lb. Pf. 11 Ggr. (B.

Will man nun 1) den Preis der Pflaumen, so multiplizire man die obere Bedingung mit 4, und die untere mit 5; dadurch verwandeln sie sich in:

20 lb. Ros. + 24 lb. Pf. kosten 54 Ggr. und

20 lb. Ros. + 25 lb. Pf. kosten 55 Ggr.

Man ziehe nun die obere Gleichung von der untern ab, so kostet also 1 Pf. Pflaumen 55 — 54, d. i. 1 Ggr.

Will man ferner 2) den Preis der Rosinen, so multiplizire man in den Bedingungen A und B die erstern mit 5 und die andern mit 6, dadurch verwandeln sie sich in:

25 lb. Ros. + 30 lb. Pf. kosten $67\frac{1}{2}$ Sgr. und
24 lb. Ros. + 30 lb. Pf. kosten 66 Sgr.

Man ziehe die untere von der obern ab, so ist das Resultat: 1 Pf. Rosinen kosten $1\frac{1}{2}$ Sgr.

102.

2 Malter Rocken und 8 Malter Waizen kosten zusammen 64 Thlr. 3 Malter Rocken und 6 Malter Waizen kosten nach demselben Preise 54 Thlr. Wie viel kostet 1 Malter von jeder Fruchtgattung?

Auflösung:

	M. Rock.	M. Waiz.	Thlr.		M. Rock.	M. Waiz.	Thlr.
	2 =	+ 8 =	kosten 64,	also	1 =	+ 4 =	32,
ferner	3 =	+ 6 =	= = 54,	also	1 =	+ 2 =	18,

Folglich, wenn man die untere Bedingung von der obern abziehet, kosten 2 Malter Waizen 14 Thlr. und also 1 Malter 7 Thlr.

Will man den Preis von 1 Malter Rocken, unabhängig von dem so eben gefundenen Preise des Waizens, auf die kürzeste Art bekommen: so nehme man die untere Bestimmung 1 Malter Rocken und 2 Mltr. Waizen kosten 18 Thlr. doppelt, dadurch verwandelt sie sich in:

2 M. R. + 4 M. W. kosten 36 Thlr.;
nun ziehe man die obere Bedingung: 1 M. R. + 4 M. W. = = 32 Thlr.
davon ab: so bleibt übrig: 1 Malter kostet 4 Thlr.

103.

Eine Pfanne fasset 18 Eimer. In die Pfanne und den Eimer gehen zusammen 570 Maaß. Wie viel Maaß fasset die Pfanne und wie viel der Eimer?

Auflösung:

Auch diese Aufgabe gehört nicht in die Algebra: sondern unter die leichteren der gewöhnlichen Rechenkunst. Ihre Auflösung ist folgende: Da die Pfanne 18 Eimer faßt, so halten die Pfanne und der Eimer zusammen 19 Eimer. Dieselben fassen aber auch mit einander 570 Maaß. Folglich machen 19 Eimer 570 Maaß; daher ist 1 Eimer $\frac{570}{19}$ oder 30 Maaß. Die Pfanne aber beträgt 18 Eimer, d. i. 18mal 30 oder 540 Maaß.

104.

Ein Landmann will eine Schuldforderung von 25 Thlrn. mit 30 Himten Rocken und 15 Himten Haber bezahlen, und rechnet 2 Himten Haber so theuer, als 1 Himten Rocken. Wie hoch hat er jeden Himten gerechnet?

Auflösung:

Mit dieser Aufgabe hat es dieselbe Bewandniß, wie mit der vorhergehenden.

Wenn 1 Himten Rocken eben so theuer ist, als 2 Himten Haber, so sind 30 Himten Rocken so viel werth, als 60 Himten Haber. Nun kosten 30 Himten Rocken und 15 Himten Haber 25 Thlr., folglich gelten auch 60 und 15, d. i. 75 Himten Haber 25 Thlr., und mithin 1 Himten Haber $\frac{25}{75}$ oder $\frac{1}{3}$ Thlr., nämlich 12 Gr. 1 Himten Rocken aber kostet das Doppelte.

105.

Ein Bauer ist einem Kaufmann 30 Thlr. 19 Gr. oder 8792 Pfenninge schuldig. Diese Schuld tilgt er mit 58 Himten Rocken und Gerste, und rechnet 1 Hmt. Rocken zu 20 Gr. 4 Pfenning, d. i. zu 164 Pfenning, und den Himten Gerste zu 15 Gr. 4 Pf. oder zu 124 Pfenning. Wie viel Himten Rocken und wie viel Gerste hat er geliefert?

Auflösung:

Gesetzt, es waren x Himten Rocken, so beträgt ihr Preis 164x; also ist der Preis der gelieferten Gerste $8792 - 164x$. Da nun 1 Hmt. der lezteren 124 Pfenning kostet, so beträgt also die Gerste $\frac{8792 - 164x}{124}$ oder $\frac{2198 - 41x}{31}$ Himten. Gerste und Rocken machen aber zusammen 57 Himten; daher ist $\frac{2198 - 41x}{31} + x = 58$, woraus $x = 40$ folgt. Es waren demnach 40 Himten Rocken, und also $58 - 40$ oder 18 Himten Gerste.

106.

Ein Sohn wird gefragt, wie alt er, sein Vater, und Großvater wären? Er antwortete: Ich und der Vater sind zusammen 54 Jahre alt; der Vater und der Großvater zusammen 109 Jahre, und ich und der Großvater zusammen 85 Jahre. Wie alt war Jeder?

Auflösung:

Man nehme an, das Alter aller zusammen sey x. Da nun Sohn und Vater zusammen 54 alt sind, so ist das Alter des Großvaters $x - 54$. Eben so ist das

Alter des Sohns x — 109, und das des Vaters x — 85. Es ist also die Summe des Alters aller drei = 3x — 54 — 109 — 85 oder = 3x — 248. Eben diese Summe würde aber auch = x angenommen; daher ist x = 3x — 248 und x = 124. Hieraus aber folgt das Alter eines jeden einzelnen, nämlich des Sohns = 124 — 109 oder 15, des Vaters 124 — 85 oder 39, und das des Großvaters 124 — 54 oder 70 Jahre.

Anders: Die Zahlen 54, 109, 85 sind das Alter der 3 Personen zu 2 und 2 combinirt; daher ist die Summe 248 derselben die doppelte Summe des Alters aller drei, und also die Hälfte 124 das Alter aller drei Personen. Zieht man nun hiervon das Alter von je zweien, d. i. nach einander die Zahlen 54, 109, 85 ab, so sind die Überreste das gesuchte Alter jeder einzelnen Person.

107.

Jemand kauft dreierlei Tuch. Die Elle des beßten kostet $2\frac{1}{2}$ Thlr., des andern 2 Thlr. und des geringsten 1 Thlr. Er nimmt des beßten nur halb so viel, als des andern, und des andern nur halb so viel, als des geringsten, und bezahlt dafür $52\frac{1}{2}$ Thlr. Wie viel hat er von jedem Tuche bekommen?

Auflösung:

Vom geringsten seyen es 4x Ellen, so sind es vom mittlern 2x und vom beßten x Ellen. Da nun des geringsten 1, des mittlern 2, und des beßten $2\frac{1}{2}$ Thlr. kosten, so kosten alle diese Ellen zusammen $4x + 4x + 2\frac{1}{2}x$ oder $10\frac{1}{2}x$, welche Summe $= 52\frac{1}{2}$ ist, woraus $x = 5$

folgt. Also waren es vom geringsten 20, vom mittlern 10, vom beßten 5 Ellen.

Anders: Da von der geringsten Sorte noch einmal so viel Ellen genommen werden, als von der mittleren; dagegen aber der Preis von 1 Elle der mittleren doppelt so groß ist, als der Preis von 1 Elle der geringsten, so gelten alle Ellen der geringsten Sorte mit einander eben so viel, als alle Ellen der mittleren Sorte. Da ferner die Anzahl aller Ellen der beßten Sorte = $\frac{1}{2}$ der Anzahl der mittleren, und der Preis von 1 Elle jener Sorte = $2\frac{1}{2}$ oder $\frac{5}{2}$ Thlr. ist, so gelten alle Ellen der beßten Sorte $\frac{5}{2}$mal so viel, als die halbe Anzahl der Ellen der mittleren Sorte beträgt, oder auch $\frac{5}{8}$mal so viel, als die doppelte Anzahl der Ellen der mittleren Sorte beträgt. Die doppelte Anzahl der Ellen der mittleren Sorte ist aber auch die Anzahl der Thaler, die diese Sorte kostet, weil 1 Elle 2 Thlr. werth ist; daher ist der Preis aller Ellen der beßten Sorte $\frac{5}{8}$ des Preises aller Ellen der mittleren Sorte. Demnach ist der gesammte Preis aller Ellen der schlechten, mittleren und beßten Sorte $2\frac{5}{8}$ des Preises aller Ellen der mittleren Sorte. Dieser Preis ist nun auch $52\frac{1}{2}$ Thlr. Also ist $\frac{21}{8}$ des Preises aller Ellen der mittleren Sorte gleich $\frac{108}{2}$ Thlr., oder $\frac{21}{4}$ dieses Preises ist gleich 5mal 21. Daher ist $\frac{1}{4}$ desselben Preises = 5, und der Preis aller Ellen der mittleren Sorte gleich 20 Thlr. Da nun 1 Elle 2 Thlr. kostet, so sind es also von der mittleren Sorte 10 Ellen.

108.

Es kauft Jemand für 15 Thlr. Nelken, Pfeffer und Ingber. Das Pfund Ingber kostet 9 Gr., das Pfund Pfeffer 18, das Pfund Nelken 27 Gr. Und wenn er 1 Pfund Nelken kauft, so will er 2 Pfund Pfeffer und 3 Pfund Ingber haben. Wie viel Pfunde bekommt er von jedem Gewürz besonders?

Auflösung:

Er kaufe x Pfund Nelken, so will er zugleich 2x Pfund Pfeffer und 3x Pfund Ingber. Nach den oben bestimmten Preisen kosten nun

x Pfund Nelken 27x Gr.
2x Pfund Pfeffer 36x Gr.
3x Pfund Ingber 27x Gr.

Mithin kosten alle diese Waaren zusammen 90x Gr. Dieselben kosten aber auch 15 Thlr. oder 16.36 Gr. Daher ist $90x = 15.36$, und mithin $x = 6$.

109.

Ihrer Viere machen 165 Dukaten Beute. B erhält davon 2mal so viel als A, C 3mal so viel als B, und D 4mal so viel als C. Was bekam Jeder?

Die Auflösung kann ohne Algebra durch eine bloße Division bewerkstelliget werden.

110.

Drei Personen kaufen ein Haus für 100 Thlr. A begehrt von B die Hälfte seines Gelds, so könnte er das Haus allein bezahlen: B begehrt von C $\frac{1}{3}$ seines Gelds, so wäre sein Vorrath hinreichend; C begehrt von

A $\frac{1}{4}$ seines Gelds, so könnte er die Zahlung leisten. Wie viel hatte Jeder?

Auflösung:

Da B die Hälfte seines Gelds an A abgeben soll: so habe er 2x. Nun hat A mit der von B erhaltenen Hälfte x gerade 100; bevor er also diese erhielt, hatte er 100 — x. Da ferner B von C $\frac{1}{3}$ seines Gelds verlangt, um ebenfalls 100 zu haben, so ist $\frac{1}{3}$ des Gelds von C so viel als 100 weniger das was B hat, das ist 100 — 2x; mithin ist die Summe, die C hat, 3mal dieser Überrest, oder 300 — 6x. Nun ist nur noch übrig, daß dieses Geld von C, um den $\frac{1}{4}$ Theil dessen, was A hat, vermehrt, 100 ist, d. i. daß $300 - 6x + 25 - \frac{x}{4} = 100$ ist, woraus $x = 36$ folgt. Demnach hat B oder 2x nun 72 Thlr. A hat 100 — x oder 64 Thlr. und C hat 300 — 6x oder 84 Thlr.

1. Anmerkung: Ohne Brüche kann diese Aufgabe auch also aufgelöst werden:

Da der einzige Bruch in der vorhergehenden Auflösung davon herkommt, daß von dem Antheil von A der $\frac{1}{4}$ Theil genommen werden muß, und $\frac{1}{4}$ von 100 bereits eine ganze Zahl 25 ist; so kommt es nur darauf an, anstatt x eine andere Zahl zu setzen, die sich durch 4 theilen läßt. Nun kommt aber dieß x von dem halben Theil von dem Antheil von B her, den man willkührlich 2x annahm. Es muß also diese Annahme so seyn, daß anstatt des Coefficianten 2 eine Zahl genommen wird, deren Hälfte sich durch 4 theilen läßt. Diese ist 8.

Es habe also B 8x. So hat A 100 — 4x, und da ferner der Antheil von B und $\frac{1}{3}$ dessen von C zusammen 100 sind; so ist $\frac{1}{3}$ des Antheils von C gleich 100 — 8x, und also der Antheil von C selbst 300 — 24x. Jetzt muß nun noch der Antheil von C und $\frac{1}{4}$ dessen von A gleich 100 seyn, und man hat also $300 - 24x + 25 - x = 100$, folglich ist $x = 9$, woraus die Antheile 8x, 100 — 4x und 300 — 24x, wie oben sich ergeben.

2. Anmerkung. Zur Übung kann man mit dem Antheil von jedem anfangen.

III.

Drei Personen hatten, jede, eine Summe Geldes. A sagte zu B: Gieb mir 100 Thlr. von deinem Gelde zu meinem, so habe ich 2mal so viel, als du behältst. B sagte zu C: Gieb mir 200 Thlr. von deinem zu meinem Gelde, so habe ich 3mal so viel, als du behältst. C sagte zu A: Gieb mir 60 Thlr. von deinem Gelde zu meinem, so habe ich 5mal so viel, als du behältst. Wie viel hatte Jeder?

Auflösung:

Da (um mit der lezten Bedingung anzufangen) C von A 60 verlangt, und sodann 5mal mehr hat, als A übrig bleiben; so nehme man an, A habe x + 60, mithin wird C, ehe es von A etwas bekommt, 5x — 60 haben: denn wenn es von A 60 bekommt, so hat es 5x und jenem bleiben x, wie es seyn muß. Da ferner A, wenn es 100 von B erhält, 2mal mehr hat,

als B übrig behält, der Antheil von A aber um 100 vermehrt, $x + 160$ ist, so muß $x + 160$ 2mal mehr seyn, als B übrig behält, nachdem es 100 abgegeben; dieser Überrest ist also $\frac{x}{2} + 80$. Mithin hatte B, ehe es diese 100 abgab, $\frac{x}{2} + 180$. Nun haben wir auch noch die zweite Forderung zu erfüllen, nach welcher der Antheil von B, um 200 von C vermehrt, 3mal so groß seyn muß, als C übrig hat. Jener Antheil von B aber, um 200 vermehrt, ist $\frac{x}{2} + 380$, und dieser Überrest ist $5x - 260$. Da nun $\frac{x}{2} + 380$ dieses Überrests Dreifaches seyn soll, so hat man also: $\frac{x}{2} + 380 = 15x - 780$, woraus $x = 80$ folgt. Es ist also:

Antheil von A oder $x + 60 = 140$ Thlr.
Antheil von B oder $\frac{x}{2} + 180 = 220$ Thlr.
Antheil von C oder $5x - 60 = 340$ Thlr.

Auch hier lassen sich zur Übung noch 2 andere Annahmen machen. Ferner lassen sich bei der eben gegebenen Auflösung die Brüche vermeiden, wenn man den Antheil von A $2x + 60$ anstatt $x + 60$ setzt.

112.

Drei Personen hatten eine Summe Geldes verzehrt. Keine konnte aber allein bezahlen; daher sagt A zu B: Gieb mir $\frac{1}{4}$ deines Geldes zu meinem, so kann ich bezahlen. B spricht zu C: Gieb mir $\frac{1}{8}$ deines Geldes zu

meinem, so kann ichs bezahlen. C spricht zu A: Gieb mir die Hälfte deines Geldes zu meinem, so kann ichs bezahlen, ob ich gleich nur 4 Thlr. habe. Was war die Zeche, und wie viel hatten A und B?

Auflösung:

Die verzehrte Summe sey 4x. Da nun B, wenn es $\frac{1}{8}$ des Antheils von C bekommt, die Summe 4x bezahlen kann, C aber 4 Thlr. hat, so hat also B, bevor es etwas von C erhält, $4x - \frac{4}{8}$ oder $4x - \frac{1}{2}$. Da ferner A, mit dem $\frac{1}{4}$ des Antheils von B, das ist: mit $x - \frac{1}{8}$ auch 4x hat; so ist also der Antheil von A $= 3x + \frac{1}{8}$; denn diese Summe, um $x - \frac{1}{8}$ vermehrt, ist wirklich 4x. Nun muß auch noch der Antheil von C, um die Hälfte des Antheils von A vermehrt, ebenfalls 4x seyn; mithin ist $4 + \frac{3x}{2} + \frac{1}{16} = 4x$, und also $x = 1\frac{5}{8}$. Die Zeche ist daher 4x oder $6\frac{1}{2}$ Thlr. Der Antheil von A oder $3x + \frac{1}{8}$ ist 4, und der von B oder $4x - \frac{1}{2}$ ist 6 Thlr.

113.

Vier Personen haben gewonnen 1710 Thlr. Wenn nun A seinen Gewinn mit 3, B seinen Gewinn mit 4, C mit 5, D mit 6 multiplizirt, so kommt allemal ein gleiches Produkt. Was ist eines Jeden Gewinn?

Auflösung:

Das jedesmal herauskommende gleiche Produkt sey $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x$;

so ist der Gewinn von $\begin{cases} A = 4 \cdot 5 \cdot 6x = 120x \\ B = 3 \cdot 5 \cdot 6x = 90x \\ C = 3 \cdot 4 \cdot 6x = 72x \\ D = 3 \cdot 4 \cdot 5x = 60x. \end{cases}$

Folglich ist die Summe aller Gewinne $= 342x$. Dieß ist also 1710, und mithin $x = 5$, woraus die einzelnen Gewinne leicht zu berechnen sind.

114.

Vier Personen haben mit einander gewonnen 1090 Thlr. Als jeder seinen Theil nachzählte, findet sich folgendes Verhältniß: Wenn A seinen Theil durch 3, B durch 4, C durch 5, D durch 6 dividirt, so kommt allezeit ein gleicher Quotient. Wie viel hat Jeder gewonnen?

Auflösung:

Es sey der herauskommende gleiche Quotient x, so ist der Gewinn von $A = 3x$, von $B = 4x$, von $C = 5x$ und von $D = 6x$; also die Summe der Gewinne aller $= 18x$. Diese Summe ist aber auch 1090 Thlr., mithin $18x = 1090$, woraus sich das gesuchte ergiebt.

115.

Ein Kaufmann erhält vielerlei Sorten Tücher, nämlich 10 Stück schwarze, 13 Stück braune, 18 Stück grüne, 20 Stück rothe. Er giebt für ein Stück braunes 1 Thlr. mehr, als für ein schwarzes; für ein Stück grünes 5 Thlr. mehr, als für ein braunes, für ein Stück rothes 5 Thlr. mehr, als für ein grünes. Für alles bezahlt er 1500 Thlr. Wie viel hat er für jede Sorte Tücher gegeben?

Die Auflösung dieser Aufgabe ist sehr leicht, und wird also, da nichts besonders dabei angebracht werden kann, übergangen.

116.

Ein Wechsler hat 3 Beutel, mit A, B, C bezeichnet, und wird gefragt, wie viel Thlr. in jedem Beutel wären? Er antwortet: Nehme ich aus B 80 Thlr. und lege sie zu A, so ist in A $2\frac{1}{2}$mal so viel, als in B bleibt. Nehme ich aus C 120 Thlr. und lege sie zu B, so ist in B $3\frac{1}{2}$mal so viel, als in C bleibt. Nehme ich aus A 60 Thlr. und lege sie zu C, so ist in C $4\frac{1}{3}$mal so viel, als in A bleibt. Wie viel war in jedem Beutel?

Auflösung:

Da B 80 Thlr. an A abgeben, und sodann A $2\frac{1}{2}$ oder $\frac{5}{2}$mal so viel haben soll, als B übrig behält, so nehme man an, B habe $2x + 80$. Giebt also derselbe 80 ab, so behält er noch $2x$ übrig. Nachdem nun A die 80 erhalten, hatte er $\frac{5}{2}$ von dem, was B übrig blieb, das ist: $\frac{5}{2}$ von $2x$, also $5x$; mithin hatte derselbe vorher $5x - 80$. Nun soll ferner, nach der dritten Bedingung, C von A 60 Thlr. erhalten, wodurch in C $4\frac{1}{3}$ oder $\frac{13}{3}$mal so viel seyn werden, als in A übrig bleibt. Aber A, um 60 vermindert, ist $5x - 140$. Folglich muß C, um 60 vermehrt, $\frac{13}{3}$mal $5x - 140$, das ist: $\frac{65x}{3} - \frac{1820}{3}$ seyn. Daher ist C selbst $\frac{65x}{3} - \frac{1820}{3}$ $- 60$ oder $\frac{65x}{3} - \frac{2000}{3}$. Jetzt ist nur noch die Bedin=

gung zu erfüllen, daß B, oder $2x + 80$, um 120, die von C genommen werden, vermehrt, eine Summe giebt, die $3\frac{1}{2}$, das ist, $\frac{7}{2}$mal so groß ist, als die in C übrig bleibt. Es ist aber $2x + 80$, um 120 vermehrt, $2x + 200$; und C, um 120 vermindert, ist: $\frac{65x}{3} - \frac{2360}{3}$; Folglich ist $2x + 200 = \frac{7}{2}\left(\frac{65x}{3} - \frac{2360}{3}\right) = \frac{455x}{6} - \frac{8260}{3}$, woraus $x = 40$ gefunden wird. Nun hatte A $5x - 80$, B $2x + 80$, und C $\frac{65x}{3} - \frac{2000}{3}$; diese Werthe verwandeln sich also in 120, 160, 200 Thlr.

117.

Drei Kinder werden mit Äpfeln beschenkt, über die sie ohne Ordnung herfallen. Da aber das älteste siehet, daß es bei weitem die meisten hat, so giebt es den beiden andern, Jedem so viel, als es schon hat. Eben das thut auch das zweite, und hernach auch das dritte, und nun findet sich's, daß Jedes 8 Stücke bekam. Wie viel hatte Jedes anfangs?

Auflösung:

Diese und die folgende Aufgabe, nebst allen ähnlichen können ohne Rechnung leicht aufgelöst werden, wenn man den Rückweg nimmt, und auf die beiden Umstände merkt, daß 1) zulezt jedes Kind eben dieselbe bekannte Anzahl von dem Vertheilten hatte, und daß 2) jedes derselben den Antheil, den diese haben, verdoppelte, so daß dieselben also vor dem Verdoppeln nur die Hälfte dessen hatten, was sie nun haben. Es seyen nämlich

die drei Kinder . . . . A, B, C,
so hatten sie zulezt die unter diesen stehende
Zahl 8, also mit einander 24. . . . . 8, 8, 8,
Da aber C, dem A und B ihre Antheile
verdoppelt hatte, so haben diese vorher ge=
habt 4, 4, und mithin C den Rest zu 24,
nämlich 16. . . . . 4, 4, 16,
Nun hat auch B dem A und C seinen
Antheil verdoppelt, also hatten diese vor=
her 2, 8, und mithin B 14. . . . . . 2, 14, 8,
Jetzt hatte auch A sowohl dem B als C
seinen Antheil verdoppelt, diese besaßen
also vor dem Verdoppeln 7 und 4, daher
bleiben dem A 13 übrig, ... 13, 7, 4.
und so viel hatten sie also anfänglich genommen.

Geht man von dem anfänglichen 13, 7, 4 abermals, nach der Vorschrift der Aufgabe, rückwärts, so kommt man wieder auf 8, 8, 8.

118.

Ein Lehrer legte seinen 6 Schülern 384 Pfenninge vor, wovon jeder nach Belieben nehmen sollte. Da aber die Theilung ungleich ausfällt, so verlangt der Lehrer, daß der Größte, welcher die meisten genommen, jedem andern so viel abgeben soll, als er bekommen. Darauf sollte der, welcher das meiste erhalten, auf gleiche Art den andern abgeben. Nachdem alle 6 dieß Verlangen erfüllet, so findet sich, daß die Pfenninge gleich getheilt sind. Wie viel Pfenninge nahm Jeder anfangs, und wie viel hat er hernach erhalten?

Auflösung:

A,	B,	C,	D,	E,	F.
64,	64,	64,	64,	64,	64.
32,	32,	32,	32,	32,	224.
16,	16,	16,	16,	208,	112.
8,	8,	8,	200,	104,	56.
4,	4,	196,	100,	52,	28.
2,	194,	98,	50,	26,	14.
193,	97,	49,	25,	13,	7.

Da die 6 Schüler zulezt von den 384 Pfenningen gleich viel bekamen, so erhielt jeder den 6ten Theil oder 64. Nun hat F jedem der andern seinen Antheil verdoppelt. Sie hatten also 32, 32, 32, 32, 32, daher blieb für F übrig 384 — 5.32 oder 224, u. s. w. bei den folgenden, bis man auf den anfänglichen Zustand 193, 97, 49, 25, 13, 7 kommt.

119.

Jemand hat 5 Zahlen, die in geometrischer Progression stehen. Wenn man die ersten viere derselben addiret, so ist die Summe $97\frac{1}{2}$, und wenn man die lezten viere addiret, so ist die Summe $146\frac{1}{4}$. Welches sind nun die Zahlen?

Auflösung:

Man findet die Summe der vier ersten Glieder einer geometrischen Progression, wenn man von dem fünften Gliede derselben das erste abziehet, und den Überrest mit dem um 1 verminderten Nenner der Progression dividiret.

Es seyen also die fünf verlangten Zahlen: A, B, C, D, E, ferner sey: $B + C + D + E = S$, und

$$A + B + C + D = s,$$

so ist, nach der so eben angeführten Eigenschaft geometrischer Progressionen, wenn n der unbekannte Nenner dieser Progression ist, $s = \frac{E - A}{n - 1}$. Nun ist aber auch, wenn man die untere Reihe von der obern abziehet, $S - s = E - A$, folglich ist $s = \frac{S - s}{n - 1}$, also $n - 1 = \frac{S - s}{s}$. Da nun im gegenwärtigen Falle oder Beispiele $S = 146\frac{1}{4}$, und $s = 97\frac{1}{2}$, so ist $n - 1 = \frac{1}{2}$, also $n = 1\frac{1}{2}$. Aus dem gefundenen Nenner n findet sich das erste Glied A, also:

Es sey dieses erste Glied $A = x$, so ist $B = nx$, $C = n^2x$, $D = n^3x$, mithin $A + B + C + D$ oder $s = x(1 + n + n^2 + n^3)$, also $x = \frac{s}{1 + n + n^2 + n^3}$, wo $s = 97\frac{1}{2}$, und $n = 1\frac{1}{2}$ ist.

Setzt man nun diese Werthe für s und n, so ergiebt sich $x = 12$, woraus sofort die übrigen vier Glieder gefunden werden.

120.

Ein Hase hat jetzt 88 Sprünge vor einem Hunde voraus. Der Hund thut 7 Sprünge, indem der Hase 5 thut, und der Hund kommt mit 2 Sprüngen eben so weit, als der Hase mit 3. Wie viel Sprünge hat der Hase noch zu thun, bis er von dem Hunde eingeholet wird?

Auflösung:

Man nehme an, der Hase mache, außer den 88 Sprüngen, die er vor dem Hunde voraus hat, noch x

Sprünge, bis er von dem Hunde eingeholt wird. Da nun der Hund 7 Sprünge thut, indem der Hase 5 thut, so wird der Hund $\frac{7x}{5}$ Sprünge machen, während der Hase x macht. Und weil 1 Hundssprung $= \frac{3}{2}$ eines Hasensprungs ist, so sind $\frac{7x}{5}$ Hundssprünge gleich $\frac{21x}{10}$ eines Hasensprungs. Dieß ist also der Weg des einholenden Hunds, in Hasensprüngen gerechnet. Dieser muß nun so groß seyn, als der vom Hasen zurückgelegte, nämlich als $88 + x$. Daher ist $x = 80$.

Anders: Ein Hasensprung sey a Zolle; so hat der Hase 88a Zolle vor dem Hunde voraus. Nun mache er noch x Sprünge, bis er eingeholt wird, so macht er also zu jenem Wege noch ax Zolle. Im Ganzen beträgt daher der Weg des gejagten Hasen $88a + ax$ Zolle. Eben so groß nun muß der Weg des ihn einholenden Hundes seyn, den derselbe in eben der Zeit zurücklegt, da der Hase x Sprünge thut.

Es macht aber der Hund in der Zeit, da der Hase 5 Sprünge thut, 7 Sprünge; daher wird er, während der Hase x Sprünge macht, $\frac{7x}{5}$ Sprünge machen. In Absicht auf die Größe derselben findet aber das Verhältniß statt, daß 3 Hasensprünge gleich 2 Hundssprüngen sind, oder daß ein Hasensprung sich zu einem Hundssprung verhält, wie 2 zu 3. Daher ist 1 Hundsprung $= \frac{3}{2}$ eines Hasensprungs. Nun nahmen wir 1 Hasensprung $=$ a Zoll; also ist 1 Hundsprung $= \frac{3a}{2}$ Zoll.

Mithin betragen $\frac{7x}{5}$ Hundssprünge $\frac{7x}{5} \cdot \frac{3a}{2}$ oder $\frac{21}{10}ax$ Zolle. Dieß ist demnach der Weg, den der Hund macht, bis er den Hasen einholt; und da er dem des lezteren gleich seyn muß, so haben wir $\frac{21\,ax}{10} = 88a + ax$, woraus $x = 80$ folgt. Es macht also der Hase zu den 88 Sprüngen, die er voraus hat, noch 80, bis er vom Hunde eingeholt wird.

121.

Einer hat 2 Sorten Wein. Von der besten kostet das Stübchen 24 Ggr., von der geringsten 15 Ggr. Er will beide Sorten so vermischen, daß das Stübchen von dem vermischten Weine für 18 Ggr. gegeben werden kann. Wie viel muß demnach von jeder Sorte genommen werden?

Die Auflösung ist sehr leicht, und der der 78. und 79. Aufgabe ähnlich.

III.

Reine quadratische Gleichungen.

Anmerkung: Bei diesen ist, da sie alle sehr einfach sind, durchaus kein Kunstgriff anwendbar. Daher ihre sehr leichte Auflösung hier nicht gegeben wird.

122.

Einige Personen fragten auf dem Weinkeller nach ihrer Zeche. Der Wirth sagte: Wenn ein Jeder so viel Mgr. erlegt, als Personen da sind, so ist alles bezahlt. Wie sie das thaten, bekam der Wirth 4 Thlr. Wie viel Personen sind also da gewesen?

123.

Nach der Fabel sollen die Hirsche 6000 Jahre leben. Ein Hirsch sagte: Wenn ich dreimal so alt wäre, als ich bin, und diese Summe würde mit einem Fünftheil meines Alters multipliziret, so kämen 6000 Jahre heraus. Wie alt war der Hirsch?

124.

Einige Handwerksbursche hatten 2 Thlr. verzehrt, und ein jeder hatte zu der Zeche so viel Pfenninge gegeben, als ihrer waren. Wie viel hatte nun ein jeder bezahlt?

125.

Man kauft für 2500 Thlr. etliche Pferde, jedes Pferd kostet viermal so viel Thaler, als der Pferde sind. Wie viel Pferde hat man gekauft?

126.

Zwei Personen hatten eine Summe Geldes verzehrt. Der Eine hatte zur Bezahlung 5 Thlr. zu wenig, der Andere hatte 5 Thlr. zu viel. Als aber beider Vorrath mit einander multipliziret wurde, kamen 96. Wie viel hatten sie verzehrt?

127.

Wenn zwei Personen, eine jede ihr Geld mit sich selbst multipliziren, und dann zusammen rechnen, so haben sie 136 Thlr. Wenn sie aber dasselbe nach der Multiplikation von einander abziehen, so bleiben nur 64 Thlr. Wie viel hat nun Jeder?

128.

Ich sagte zu einigen Armen: Wenn ich einem Jeden von euch 2 Thlr. gebe, so bekommt ihr alle mein Geld; wenn ich aber einem Jeden so viel geben wollte, als ich habe, so müßte ich 1058 Thlr. haben. Wie viel Thaler hatte ich, und wie viel waren der Armen?

129.

Ein Mann bestimmt die Summe seines Vermögens folgendermaßen: Wenn ich den zehnten Theil mit sich selbst multiplizire, so kommen 419904 Thlr. Wie groß ist nun das Vermögen?

130.

Man soll zwei Zahlen finden, welche in einander multipliziret, das Produkt $22\frac{1}{2}$, die eine in die andere dividirt, den Quotienten $2\frac{1}{2}$ geben. Welches sind die Zahlen?

131.

Es hat Jemand dreierlei Waaren, und kostet jedes Pfund von jeder Sorte so viel Thaler, als es Pfunde sind. Der zweiten Sorte ist zweimal so viel, als der ersten, und der dritten Sorte ist dreimal so viel, als der zweiten, und beträgt der ganze Werth $256\frac{1}{4}$ Thlr. Wie viel hat er von jeder Waare besonders gehabt?

132.

Etliche Kaufleute haben angelegt, Jeder zehnmal so viel Thaler, als Personen sind, und gewinnen mit 100 Thlr. zweimal so viel, als Personen sind; wenn man ein Hunderttheil des ganzen Gewinnstes durch $2\frac{2}{9}$ multipliziret, so kommt die Anzahl der Personen heraus. Wie viel Personen nahmen also Theil an dem Handel?

133.

Es haben drei Personen Geld, so oft der Erste hat 7 Thlr., hat der Andere 3, und so oft der Andere hat 17 Thlr., hat der Dritte 5. Wenn ich aber das Geld des Ersten mit dem Gelde des Andern, das Geld des Andern mit dem Gelde des Dritten, und das Geld des Dritten mit dem Gelde des Ersten multiplizire, hernach diese drei Produkte addire, so ist die Summe $3830\frac{2}{3}$ Thlr. Wie viel hat ein Jeder gehabt?

IV.

Vermischte quadratische Gleichungen.

Anmerkung: Bei diesen ist zu bemerken, daß manche Aufgaben, die auf dergleichen vermischte quadratische Gleichungen führen, durch geschickte Annahmen auf reine, also weit einfachere gebracht werden können, wie viele der folgenden Beispiele beweisen.

134.

Etliche Personen hatten in einer Schenke 12 Stübchen Wein getrunken, wovon jedes 24 Gr. kostete. Der Wirth sagte: Wenn Jeder 2 Gr. mehr giebt, als Personen sind, so ist alles bezahlt. Wie viel waren es Personen?

Auflösung:

Wenn man annimmt, es seyen x Personen, so zahlt jede $x + 2$ Groschen, mithin alle x zusammen $x^2 + 2x$ Groschen, welche Summe $= 24 . 12$ oder 288 ist. Auf diese Art gelangt man also zu einer unreinen quadratischen Gleichung, die, obschon nicht schwer aufzulösen, dennoch sehr leicht durch eine veränderte Annahme der unbekannten Personen vermieden werden kann.

Man setze nämlich, es seyen $x - 1$ Personen. Da nun jede 2 Gr. mehr geben soll, als der Personen sind, so giebt also jede Person $x + 1$ Groschen; mithin geben alle $x - 1$ Personen $(x - 1)(x + 1)$ oder $x^2 - 1$

Groschen. Nun geben sie aber auch 288 Gr. Daher ist $x^2 - 1 = 288$, und $x^2 = 289$, also $x = 17$. Es waren also $x - 1$ oder 16 Personen und jede zahlte $x + 1$ oder 18 Gr.

135.

Ein Garten ist 6 Ruthen länger, als er breit ist, und sein ganzer Inhalt beträgt 91 Quadratruthen. Wie lang und breit ist er?

Auflösung:

Man kennt den Unterschied der Länge und Breite, welcher 6 ist. Kennte man nun auch noch die Summe der Länge und Breite, so ließe sich sowohl die Länge als die Breite finden. Es sey also:

$$\text{Länge} + \text{Breite} = 2x.$$

Da nun Länge — Breite = 6, so ist, wenn man beide Gleichungen zuerst addirt, und dann auch abziehet, und Summe und Unterschied halbiret:

$$\text{Länge} = x + 3.$$
$$\text{Breite} = x - 3.$$

Nun ist aber der Inhalt eines Rechtecks ein Produkt aus der Länge in die Breite. Daher ist der Inhalt des Gartens $(x + 3)(x - 3)$ oder $x^2 - 9$. Dieser Inhalt ist aber auch 91; folglich ist $x^2 - 9 = 91$, also $x^2 = 100$, und mithin $x = 10$. Daher ist die Länge $x + 3$ oder 13, und die Breite $x - 3$ oder 7.

136.

Ein Gutsbesitzer hat ein Stück Landes von 60 Morgen, oder 60 . 120 Quadratruthen. Dasselbe ist 4mal

so lang als breit und 20 Ruthen darüber. Wie lang und breit ist das Feld?

Auflösung:

Es ist also der Unterschied der Länge und 4fachen Breite = 20. Nun sey die Summe der Länge und 4fachen Breite = $4x$, so ist die Länge = $2(x+5)$ und 4fache Breite = $2(x-5)$, also die Breite = $\frac{1}{2}(x-5)$. Daher ist der Inhalt des Stück Landes = $2(x+5) \cdot \frac{1}{2}(x-5)$ oder $x^2 - 25$. Dieser Inhalt ist aber auch 7200. Daher ist $x^2 - 25 = 7200$, mithin $x^2 = 7225$ und $x = 85$. Hieraus folgt die Länge $2(x+5) = 180$ und die Breite $\frac{1}{2}(x-5)$ oder 40.

137.

Man kauft so viele Pfunde Waaren, als man für 1 Pfund Groschen bedungen hat; wegen prompter Bezahlung aber zieht man auf jedes Pfund 1 Groschen ab. Die Bezahlung ist 1190 Gr. Wie viel waren es Pfunde?

Auflösung:

Man nehme an, es seyen $x + \frac{1}{2}$ Pfunde gewesen; so ist also der Preis eines Pfunds $x + \frac{1}{2} - 1$, d. i. $x - \frac{1}{2}$ Gr.; mithin gelten alle Pfunde $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$ oder $x^2 - \frac{1}{4}$ Groschen. Dieselben gelten aber auch 1190 Gr. Daher ist $x^2 - \frac{1}{4} = 1190$, und also $x = \frac{69}{2}$, folglich die Anzahl der Pfunde $x + \frac{1}{2}$ oder 35.

138.

Wenn wir beide unser Geld zusammen werfen, so können wir einen Garten für 92 Thlr. miethen; wenn

wir aber unser Geld mit einander multipliziren, so können wir ihn für 672 Thlr. kaufen. Wie viel Geld hat Jeder von uns?

Auflösung:

Wir kennen also die Summe des Geldes von A und von B, welche 92 ist: Wüßten wir nun auch noch den Unterschied eben dieses Geldes, so ließe sich sowohl das von A als das von B daraus finden. Es sey also dieser Unterschied $2x$; so ist das Geld von A gleich der halben Snmme, vermehrt um den halben Unterschied, oder $46 + x$, und das von B gleich der halben Summe, vermindert um den halben Unterschied, oder $46 - x$; mithin das Produkt des Geldes von beiden $46^2 - x^2$. Dieses Produkt ist aber auch 672; daher ist $46^2 - x^2 = 672$, woraus $x = 38$ folgt. Es ist also das Geld von A oder $46 + x = 84$, und das von B oder $46 - x = 8$ Thlr.

139.

Ein Reisender zahlt für sich und seine Bedienten in einem Gasthofe eine gewisse Anzahl Thaler. Er ist aber 6 Tage mehr da gewesen, als er für jeden Tag Thlr. giebt. Am Ende bezahlt er 135 Thlr. Wie viel Tage ist er da gewesen, und was hat er täglich bezahlt?

Auflösung:

Er sey $x + 3$ Tage im Gasthofe gewesen. Da er nun 6 Tage mehr da war, als er für jeden Tag Thlr. giebt, so zahlt er also täglich $x - 3$ Thlr.; denn diese Summe ist um 6 kleiner als $x + 3$. Die Zeche auf $x + 3$ Tage beträgt also $(x + 3)(x - 3)$ oder $x^2 - 9$,

und diese muß gleich 135 Thlr. seyn, woraus $x = 12$ folgt. Er war also $x + 3$ oder 15 Tage im Gasthofe und bezahlte täglich 9 Thlr.

140.

Jemand wird gefragt, wie groß das Kapital sey, das er zu 5 Procent verliehen habe. Er antwortet: Wenn man den achten Theil des Kapitals durch die zweijährigen Zinsen des ganzen Kapitals multipliziret, und zum Produkt 15 addiret, so erhält man das Kapital wieder. Wie groß ist das Kapital?

Die Auflösung dieser und der beiden folgenden Aufgaben ist die gewöhnliche und nichts besonders bei derselben anzumerken, daher sie hier alle drei übergangen werden.

141.

Ein Mann wird gefragt, wie viel Ochsen er habe? Er antwortete: Wenn ich die Anzahl derselben quadrire, so kommen 32 mehr, als wenn ich diese Anzahl durch 35 multiplizire, und zum Produkt die Anzahl selbst und 800 addire. Wie viel Ochsen waren es?

142.

Man kauft ein Pferd für etliche Thaler, verkauft dasselbe wieder für 119 Thlr. und gewinnt an 100 so viel Thaler, als das Pferd gekostet hat. Wie theuer wurde es eingekauft?

143.

Man hat 8 Zahlen, die in arithmetischer Progression stehen. Werden die beiden mittelsten addiret, so kommen

34. Wird aber die erste und lezte mit einander multipliziret, so kommen 93. Welches sind die Zahlen?

Auflösung:

Es sey der Unterschied der beiden äußersten Glieder 2x. Da nun in jeder arithmetischen Progression die Summe der Glieder, die von den äußersten gleich weit entfernt sind, gleich der Summe der äußersten ist, die beiden mittlern aber zusammen 34 ausmachen; so ist also auch die Summe der beiden äußersten 34, und daher das größere derselben gleich der halben Summe 17, vermehrt um den halben Unterschied x, und das kleinere gleich der halben Summe 17, vermindert um eben diesen halben Unterschied. Mithin ist das Produkt derselben $(17 + x)(17 - x)$ oder $289 - x^2$. Eben dieses Produkt ist aber auch 93; folglich haben wir $289 - x^2 = 93$, also $x^2 = 196$ und $x = 14$. Das erste Glied der gesuchten Progression ist demnach $17 - x$ oder 3, und das lezte $17 + x$ oder 31. Jetzt fehlt nur noch die Differenz der Glieder, um die Progression bilden zu können. Es ist aber in jeder arithmetischen Progression das lezte Glied gleich dem ersten, vermehrt um das Produkt aus der Differenz in die um 1 verminderte Anzahl der Glieder. Wenn man also von 31 das erste Glied 3 abzieht, und den Überrest 28 mit 7 dividirt, o ist der Quotient 4 die gesuchte Differenz. Die verlangten 8 Zahlen sind daher: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 7, 31.

144.

Ein Rathhaus hat im Untergeschoß etliche Stuben. Wenn ich die Zahl derselben weniger 5 mit ihr selbst

weniger 6 multiplizire, so kommen 3 mehr als Stuben sind. Wie viel Stuben sind es?

Auflösung:

Es sey die Anzahl der Stuben $y + 6$, so will diese Aufgabe, daß $y (y + 1) = y + 9$ sey, woraus $y^2 = 9$ und $y = 3$ folgt.

145.

In einer Ringmauer finden sich eine Anzahl Häuser. Wenn man 55 dazu addiret, und 45 davon subtrahiret, und dann die Summe mit dem Reste multipliziret, so kommen 900000 Häuser. Wie viel sind also derselben?

Auflösung:

Die Anzahl der Häuser sey $x - 5$, so verlangt diese Aufgabe, daß $(x + 50)(x - 50)$ oder $x^2 - 2500 = 900000$ sey, woraus $x = 950$, und die gesuchte Häuserzahl $= 945$ folgt.

146.

Man verlangt 2 Zahlen, deren Summe 16, und die Summe ihrer Quadrate 130 ausmacht. Welches sind sie?

Auflösung:

Es sey der Unterschied beider Zahlen $2x$. Da nun ihre Summe 16 ist, so ist die größere $8 + x$, und die kleinere $8 - x$, ferner das Quadrat der größeren $64 + 16x + x^2$, und der kleineren $64 - 16x + x^2$; also die Summe beider Quadrate $128 + 2x^2$. Diese ist aber auch 130; daher ist $128 + 2x^2 = 130$, also $x^2 = 1$, und $x = 1$. Die verlangten Zahlen aber sind 9 und 7.

147.

20 Personen, Männer und Weiber, verzehren, die Männer 24 Gr. und die Weiber 24 Gr.; aber es findet sich, daß ein Mann 1 Gr. mehr verzehrt hat, als ein Weib. Wie viel waren es Männer und wie viel Weiber?

Auflösung:

Ein Weib habe verzehrt x Gr., so verzehrte ein Mann $x + 1$ Gr.; es waren also $\frac{24}{x}$ Weiber und $\frac{24}{x+1}$ Männer; folglich ist $\frac{24}{x} + \frac{24}{x+1} = 20$. Diese Gleichung wird auf die gewöhnliche Art aufgelöset. Statt dieser theile ich zur Veränderung folgende indirekte mit. Wenn man annimmt, es sey x eine ganze Zahl, so muß sie von der Art seyn, daß sowohl sie, als die um 1 Einheit größern Faktoren von 24 sind. Nun sind aber die Faktoren von 24 folgende: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, von denen die beiden äußersten von selbst hinweg fallen. Unter diesen sind nun nur 2, 3, 4 von der Art, daß sie nur um 1 Einheit verschieden sind; daher ist x entweder 2 oder 3. Der lezte Fall $x = 3$ findet nicht statt, weil $\frac{24}{3} + \frac{24}{4} = 14$ und nicht, wie es seyn sollte, $= 20$ ist. Aber $x = 2$ leistet Genüge; denn $\frac{24}{2} + \frac{24}{3} = 12 + 8 = 20$. Also waren es 12 Weiber und 8 Männer.

148.

Ein Kirchthurm ist 1 Jahr eher, als das Rathhaus erbaut worden. Wenn man beide Jahrzahlen mit einander multipliziret, so kommen 2419580. In welchem Jahre ist nun der Kirchthurm aufgeführt worden?

Auflösung:

Das Rathhaus sey erbaut worden im Jahre $x + \frac{1}{2}$, so ist der Kirchthurm erbaut worden im Jahre $x - \frac{1}{2}$. Das Übrige ist leicht.

149.

Ein Prinz fragte seinen Hofmeister um sein Alter. Derselbe antwortete: Wenn Sie Ihr eigenes und Ihres Vaters Alter mit einander multiplizihren, so bekommen Sie 1176; wenn Sie aber beider Alter addiren, so ist die Summe 77 Jahre. Wie alt war der Prinz?

Auflösung:

Die Summe des Alters von beiden ist 77. Setzt man also den Unterschied desselben x, so ist das Alter des Vaters $\frac{77}{2} + \frac{x}{2}$ und des Sohnes $\frac{77}{2} - \frac{x}{2}$. Also beider Produkt: $\frac{1}{4}(5929 - x^2)$, welches demnach $= 1176$ ist, woraus $x = 35$ gefunden wird.

150.

Eine gewisse Waare wird mit so viel Prozent Gewinn verkauft, als das Pfund im Einkauf gekostet. Man empfängt nun aber für jedes Pfund 6 Mrk. 10 ßl. 3 Pf. Wie viel hat also das Pfund im Einkauf gekostet?

NB. Diese Aufgabe läßt sich durch die gewöhnliche Rechenkunst sehr leicht auflösen.

151.

Man soll 2 Zahlen finden, deren Differenz 8 ist. Wenn von der größern 8 subtrahiret, und zu der klei-

neren 6 addiret werden, und die Summe wird dann mit dem Rest multipliziret, so ist das Produkt 352. Welches sind die beiden Zahlen?

Auflösung:

Man setze die Summe beider unbekannten Zahlen $= 2x + 2$. Da nun ihr Unterschied 8 ist, so ist die größere $x + 5$, und die kleinere $x - 3$. Ziehet man von jener 8 ab, und addiret zu dieser 6, so ist der Unterschied und die Summe $x - 3$ und $x + 3$; also beider Produkt $x^2 - 9$. Dieß muß gleich 352 seyn, woraus $x = 19$ folgt.

152.

Es sind 7 Zahlen in einer arithmetischen Progression, wovon die größte Zahl 33 ist. Wenn man aber die beiden kleinsten mit einander multipliziret, so giebt $\frac{1}{3}$ des Produkts und noch 28 gerade so viel, als die Summe aller Zahlen. Welches ist die Differenz der Progression?

Anmerk. Man mag das erste Glied dieser Progression oder ihre Differenz als die unbekannte Größe ansehen, so gelangt man immer auf eine unreine quadratische Gleichung, bei der ich übrigens nichts zu erinnern weiß.

153.

Drei Künstler arbeiten jeder so viel Tage, als ihnen, Jedem täglich Gulden versprochen sind. Doch hat B täglich 1 Gulden mehr, als A, und C täglich 1 Gulden mehr, als B. Insgesammt werden ihnen aber 245 Gulden ausbezahlt. Wie viel Tage hat Jeder insbesondere gearbeitet?

Auflösung:

A erhalte täglich $x - 1$ Gulden, so arbeitet er also $x - 1$ Tage, und verdienet im Ganzen $(x - 1)^2$ oder $x^2 - 2x + 1$ Gulden. Da B täglich 1 Gulden mehr erhält, als A, so bekommt er x Gulden, und weil er eben so viele Tage arbeitet, als er täglich Gulden erhält, so arbeitet er x Tage, und verdienet im Ganzen x^2 Gulden.

Eben so erhält C täglich $x + 1$ Gulden, arbeitet $x + 1$ Tage, und verdienet im Ganzen $x^2 + 2x + 1$.

Alle drei verdienen also mit einander $3x^2 + 2$. Diese Summe muß demnach gleich 245 seyn. Daher ist $x^2 = 81$ und $x = 9$.

154.

Einer kauft eine gewisse Anzahl Tücher, das erste für 2 Thlr., das zweite für 4 Thlr., das dritte für 6 Thlr. und so fort, immer 2 Thlr. mehr für das folgende. Für alle bezahlt er 110 Thlr. Wie viel sind es Tücher gewesen?

Auflösung:

Man hat also eine arithmetische Progression, deren erstes Glied 2, zweites 4, drittes 6, xtes 2x und Differenz 2 ist, von welcher Progression man die Summe kennt, und aus diesen Datis wird die Anzahl der Glieder oder x gesucht. Es ist aber die Summe dieser Progression $= (2x + 2)$ mal der halben Anzahl der Glieder oder $(2x + 2) \cdot \frac{x}{2}$, nämlich $x(x + 1)$. Diese Summe muß demnach $= 110$ seyn, woraus x gefunden wird.

Indirekte ergiebt sich dieser Werth auch also: $x(x+1) = 110$. Nun ist aber $110 = 10 \cdot 11 = 10\,(10+1)$. Folglich ist $x = 10$.

155.

Einer kauft etliche Tücher für 180 Thlr. Wären der Tücher 3 mehr gewesen für eben das Geld, so wäre ihm das Stück um 3 Thlr. wohlfeiler gekommen. Wie viel waren es Tücher?

Anmerk. Die Auflösung ist der 147. ganz ähnlich, und kann überdieß auch eben so, wie jene, auf eine indirekte Art bewerkstelliget werden.

156.

Zwei Weiber tragen zusammen 100 Eier auf den Markt, eine mehr wie die andere, und lösen dennoch beide gleich viel Geld. A sagt zu B: Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Gr. gelöset; B erwiedert: Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Gr. gelöset. Wie viel Eier hatte nun Jede?

Auflösung:

Diese Aufgabe ist von der Zahl derjenigen, die nur scheinbar auf eine quadratische Gleichung führen, und bei gehöriger Behandlung auf den ersten Grad gebracht werden können.

Es habe nämlich A gehabt x Eier; so hatte B $100 - x$. Da nun A aus $100 - x$ würde 15 Gr. gelöset haben, so hat diese Person aus ihren x gelöset: $\frac{15x}{100-x}$ Gr. Eben so, da B aus x Eiern würde $6\frac{2}{3}$ oder $\frac{20}{3}$ Gr.

gelöset haben, so hat dieselbe aus ihren 100 — x erlöset $\frac{20}{3}$ $\left(\frac{100-x}{x}\right)$. Nun sind die Erlöse von beiden gleich. Daher ist $\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x}$. Hieraus folgt

$9x^2 = 4(100-x)^2$, mithin ist auch

$3x = 2(100-x)$, woraus

$x = 40$ folgt.

Also hatte A 40 und B 60 Eier.

157.

Zwei Kaufleute verkaufen einige Ellen Zeug, B 3 Ellen mehr als A, und lösen zusammen 35 Thlr. A sagt zu B: Hättest du dein Zeug so theuer, wie ich das meinige verkauft, so hättest du daraus 24 Thlr. gelöset. B antwortet: Und hättest du deinen so theuer, als ich den meinigen verkauft, so hättest du $12\frac{1}{2}$ Thlr. daraus gelöset. Wie viel Ellen hatte Jeder?

Anmerk. Die Auflösung ist der der 155. Aufgabe ähnlich, und sehr leicht, daher sie hier übergangen wird.

158.

Die Summe zweier Zahlen ist 35, und die Summe ihrer Quadrate 625. Welches sind diese Zahlen?

Anmerk. Man nenne den Unterschied beider Zahlen x, so löset sich diese Aufgabe wie die 146. auf.

159.

Jemand bestimmt die Höhe eines Thurms auf folgende Art: Wenn man 106 Fuß davon abzieht, oder

1009 Fuß dazu thut, so kommt jedesmal eine Kubikzahl, deren Wurzeln um 5 unterschieden sind. Wie hoch ist der Thurm?

Auflösung:

Da die Wurzeln der beiden sich ergebenden Würfel um 5 unterschieden sind, so sey die größere $= x + \frac{5}{2}$, und die kleinere $= x - \frac{5}{2}$. Es ist demnach der Würfel der ersteren $= x^3 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x + \frac{125}{8}$, und der Würfel der zweiten $= x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x - \frac{125}{8}$. Daher ist die Höhe des Thurms, durch den ersten Würfel berechnet:

$$= x^3 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x + \frac{125}{8} - 1009,$$

und durch den zweiten Würfel berechnet, ist sie

$$= x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x - \frac{125}{8} + 106.$$

Es muß aber auf beide Arten eben dieselbe Höhe herauskommen; daher ist $x^3 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x + \frac{125}{8} - 1009 = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x - \frac{125}{8} + 106$, mithin auch, wenn man gleiches von gleichem abziehet und gehörig reduzirt: $x^2 = \frac{289}{4}$, und also $x = \frac{17}{2}$, woraus der Thurm leicht vollends berechnet werden kann.

160.

Man hat 3 Zahlen, die eine geometrische Progression ausmachen, und von der Beschaffenheit sind, daß wenn man sie addiret, die Summe 105, wenn man sie aber multipliziret, das Produkt 8000 ist. Welches sind diese Zahlen?

Auflösung:

Diese drei Zahlen seyen A, B, C, und B sey $= x$. Da sie nun eine geometrische Progression bilden, so muß

$A : B = B : C$, und also $AC = B^2 = x^2$ seyn. Daher ist $ACB = x^3$. Nun ist aber auch das Produkt aller drei $= 8000$. Folglich ist $x^3 = 8000$, und demnach $x = 20$. Wir haben also AC oder $x^2 = 400$, und da die Summe aller drei $= 105$, die mittlere aber 20 ist; so ist $A + C = 85$. Aus diesen beiden Gleichungen $A + C = 85$ und $AC = 400$ finden sich nun A und C auf die bekannte Art also: Es ist $(A + C)^2 =$
$A^2 + 2AC + C^2 = 7225$, ferner
$4AC = 1600$;
daher, wenn man die untere Gleichung von der obern abziehet, $A^2 - 2AC + C^2$, das ist $(A - C)^2 = 5625$, mithin $A - C = 75$.

Wir haben also: $A + C = 85$
$A - C = 75$

$2A = 160$
und $A = 80$
ferner $2C = 10$
und $C = 5$.

Die verlangten Zahlen A, B, C sind demnach 80, 20, 5.

161.

Einer hat zweierlei Thee, und findet, wenn er jedes Pfund des ersten um so viel Thaler verkauft, als des zweiten Pfunde sind, so kann er 98 Thlr. lösen. Da er aber jeden besonders, jedes Pfund um so viele Thlr. verkauft, als es Pfunde sind: so bekommt er 245 Thlr. Wie viel Pfund sind nun vom ersten, und wie viel Pfund von dem andern vorhanden?

Von der ersten Sorte seyen es x Pfunde, so findet sich diese Gleichung $\left(\frac{98}{x}\right)^2 + x^2 = 245$, welche sich in $x^4 - 245x^2 = 98^2$ verwandelt, woraus sich auf die bekannte Art x^2, und hieraus x ergiebt.

162.

Eine Mutter beschenkte jede ihrer vier Töchter mit einer Anzahl Thlr., doch also, daß sie mehr erhalten, so wie sie älter sind, und stehen die vier Summen in geometrischer Progression. Wird die größte Zahl zur kleinsten addiret, so kommen $17\frac{1}{2}$, werden alle Zahlen mit einander multipliziret, so kommen 2916. Wie viel hat jede Tochter erhalten?

Auflösung:

Die Töchtern erhalten der Ordnung nach die Summen:

A, B, C, D.

Da nun $A + D = 17\frac{1}{2}$, so sey

$A - D = x$;

so ist $A = \frac{17\frac{1}{2} + x}{2}$, und $D = \frac{17\frac{1}{2} - x}{2}$, also ist $AD = \frac{(17\frac{1}{2})^2 - x^2}{4}$. Es ist aber $AD = BC$, also ist auch $ADBC = (AD)^2$. Nach der zweiten Bedingung der Aufgabe ist nun $ADBC = 2916$; folglich ist auch $(AD)^2 = 2916 = 54^2$, daher $AD = 54$. So eben war aber $AD = \frac{(17\frac{1}{2})^2 - x^2}{4}$; also ist $\frac{(17\frac{1}{2})^2 - x^2}{4} = 54$, und hieraus folgt $x = 9\frac{1}{2}$. Demnach haben

wir $A = 13\frac{1}{2}$, und $D = 4$. Jetzt kommt es noch darauf an, B und C zu finden, welches am leichtesten also geschehen kann:

Vermöge der Eigenschaften der geometrischen Progressionen ist $BC = AD$, also $C = \frac{AD}{B}$, daher $C^2 = \frac{A^2 D^2}{B^2}$.

Aber $B^2 = AC$, also ist auch $C^2 = \frac{A^2 D^2}{AC} = \frac{AD^2}{C}$, daher $C^3 = AD^2 = DAD = 4 \cdot 54 = 216$, mithin ist $C = 6$. Aus A und C ergiebt sich $B^2 = AC = 81$, und also $B = 9$. Die vier gesuchten Zahlen sind demnach $13\frac{1}{2}$, 9, 6, 4.

163.

Zwei Personen haben ein Kapital von 200 Thalern zu einem Handel zusammen gebracht. A läßt sein Geld 4 Monate darin, und zieht darauf mit seiner Einlage und seinem Gewinn zusammen 176 Thlr. B hatte sein Geld nur 3 Monate im Handel, und mit Einlage und Gewinn zusammen 228 Thlr. gezogen. Wie viel hat Jeder angelegt? Antwort: A 80, B 120 Thlr.

Anmerk. Bei dieser Aufgabe kann nichts besonders gezeigt werden, und es ist also dieselbe nach der gewöhnlichen Methode aufzulösen.

164.

Ein Kaufmann hat eine Summe von 1200 Thalern in einem Handel angelegt, wodurch sich dieß Kapital (indem er Zins auf Zins rechnete) in zwei Jahren um $305\frac{7}{25}$ Thlr. vermehrt hat. Wie viel hat er jährlich mit 100 Thalern gewonnen?

Auflösung:

Es sey x der jährliche Zins von 100, so ist
$100 : 100 + x = 1200 : y$, wo y die Summe ist, auf die 1200 im ersten Jahre mit dem Zins anwächst, und
$100 : 100 + x = y : z$, wo z die Summe ist, auf die y im 2ten Jahre mit dem Zins anwächst; folglich ist:
$100^2 : (100 + x)^2 = 1200 : z$; und daher
$z = \frac{(100 + x)^2 . 1200}{100^2}$. Nun ist aber $z = 1505\frac{7}{25}$;
mithin ist $\frac{(100 + x)^2}{100^2} . 1200 = 1505\frac{7}{25}$, woraus $x = 12$ gefunden wird.

Anmerk. Bei einfachen Zinsen hätte man blos diese Proportion zu machen gebraucht: $100 : 100 + x = 1200 : 1505\frac{7}{25}$; so hätte sich hieraus der 2jährige Zins von 100 ergeben.

165.

Es hat Jemand 2 Zahlen, wovon die eine um 7 größer ist, als die andere. Wenn man nun 100 durch jede dieser Zahlen dividiret, und die Quotienten addiret, so kommen $43\frac{1}{3}$ heraus. Welches sind diese Zahlen? Antwort: 3 und 10.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist sehr leicht und wird deshalb hier übergangen.

166.

Ein Lehrer hat 3 Klassen von Schülern. Einer aus der mittlern Klasse giebt quartaliter 3 Thlr. mehr, als

einer aus der untersten; einer aus der höchsten Klasse aber 5 Thlr. mehr, als aus der mittlern. In der untersten Klasse sind 11 mehr, als in der mittlern, und in der mittlern 11 mehr, als in der höchsten. Überhaupt aber sind in der höchsten Klasse $1\frac{1}{3}$mal so viel Schüler, als einer in der untersten Klasse quartaliter Thaler giebt. Der Lehrer erhält aber im Quartal von allen 73mal so viel Thaler, als einer von den untersten giebt. Wie viel Schüler waren es überhaupt, und in jeder Klasse insbesondere?

Auflösung:

Nachdem man angenommen, daß jeder Schüler in der untersten Klasse quartaliter 3x Thaler gegeben habe, lassen sich die Bedingungen dieser Aufgabe am leichtesten in folgendem Schema übersehen:

	Ein Schüler giebt quartalit.	Anzahl der Schüler.	Alle geben quartalit.
Höchste Klasse:	$3x + 8$ Thlr.	$4x$	$12x^2 + 32x$
Mittlere Klasse:	$3x + 3$ Thlr.	$4x + 11$	$12x^2 + 45x + 33$
Unterste Klasse:	$3x$ Thlr.	$4x + 22$	$12x^2 + 66x$

Die Summe aller dieser Quartalgelder ist $36x^2 + 143x + 33$. Eben diese Summe ist aber auch 73mal so viel Thaler, als ein Schüler der untersten Klasse Thlr. giebt, nämlich 73mal 3x oder 219x, daher haben wir:

$$36x^2 + 143x + 33 = 219x; \text{ mithin}$$

$$36x^2 - 76x = -33,$$

woraus $x = 1\frac{1}{2}$ folgt. Aus diesem Werth kann die Anzahl sämmtlicher Schüler sowohl, als derjenigen in jeder einzelnen Klasse leicht berechnet werden.

V.

Reine kubische Gleichungen.

Anmerk. Bei diesem und den zwei folgenden Kapiteln ist weiter nichts zu erinnern. Die Aufgaben werden auf die gewöhnliche Art aufgelöst. Daher dieselben ohne alle Erklärung hiermit der Ordnung nach folgen.

167.

Ein Gärtner hatte etliche Gärten, in jedem derselben standen so viele tragbare Bäume, als der Gärten waren, und er verkaufte die Früchte von jedem Baume für so viele Thaler, als der Gärten waren. Für alles hatte er 4096 Thlr. empfangen. Wie viel waren der Gärten?

168.

Den Vorrath meines Geldes bestimme ich also: Wenn ich dessen Quadrat mit $\frac{1}{4}$ von meinem Gelde multiplizire, so kommen 432. Wie viel Thlr. habe ich also?

169.

Man fordert drei Zahlen, die in geometrischer Progression stehen, deren Exponent 2 ist, und wenn die dritte quadriret, und mit der ersten multipliziret wird, so kommen 432. Welches müssen die Zahlen seyn?

170.

Zu einer Reise sind einige Thaler bestimmt. Die Hinreise kostet $\frac{1}{4}$ dieser Thaler, die Rückreise $\frac{1}{3}$, der Ort des Aufenhalts $\frac{1}{8}$. Wenn man diese Theile in einander multipliziret, kommt 9216 Thlr. Wie viel Thaler sind zu der Reise bestimmt?

171.

Etliche Kaufleute machen eine Gesellschaft, und legt jeder 100mal so viel ein, als ihrer sind, schicken damit einen Faktor nach Venedig, der gewinnt allemal mit 100 Floren 2mal so viel, als ihrer sind; kommt wieder zurück, und der Gewinn beträgt 2662 Gulden. Wie viel sind der Kaufleute?

172.

Ich habe ein Kapital, wenn ich $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ desselben mit einander multiplizire, so kommen 54000 heraus. Wie stark muß das Kapital seyn?

173.

Ein Stadtgraben soll 4mal so breit als tief, und 8mal so lang als breit seyn. Jede 8 kubische Ellen herauszubringen, sind um $1\frac{1}{2}$ Thaler verdungen; und insgesammt wird $273\frac{3}{8}$ Thlr. bezahlt. Wie tief, wie breit und wie lang muß dieser Graben werden?

174.

Einige Hauptleute liegen zu Felde, Jeder hat unter sich 3mal so viel Reuter, und 20mal so viel Fußgänger,

als der Hauptleute sind; und ein Reuter bekommt Monatsgeld, gleich so viel Gulden, als der Hauptleute sind; und ein Fußgänger halb so viel Gulden. Der monatliche Sold für alle Reuter und Fußgänger beträgt nun 13000 Gulden. Wie viel Hauptleute müssen es daher seyn?

175.

Eine Bäuerin vertauscht Enten gegen Hühner, und giebt allemal zwei Enten für drei Hühner. Die Hühner legen Eier, jede $\frac{1}{3}$ so viel, als der Hühner sind. Mit denselben geht sie zu Markte, giebt allemal 9 Eier für so viel Pfenninge, als ein Huhn Eier gelegt hat, und löset 72 Pfenninge. Wie viel Enten hat nun die Bäuerin vertauscht?

176.

Ich habe drei Zahlen; wenn ich das Quadrat der ersten Zahl mit der zweiten multiplizire, so kommen 36. Wenn ich das Quadrat der zweiten Zahl mit der dritten Zahl multiplizire, so kommen 80. Und wenn ich das Quadrat der dritten Zahl mit der ersten Zahl multiplizire, so kommen 75. Welches sind nun die drei Zahlen?

VI.

Vollständige kubische Gleichungen.

177.

A sagte zu B: Ich habe nur 12 Thlr. mehr als du, aber wenn man das Produkt unsers Geldes mit der Summe unsers Geldes multipliziret, so kommen 14560. Wie viel Thlr. haben beide gehabt?

178.

Etliche Personen fangen einen Handel an, ein Jeder von ihnen giebt dazu zehnmal so viel Thaler, als der Personen sind, und gewinnen mit jedem Hundert 6 Thlr. mehr, als ihrer sind. Ihr Gewinn beträgt nun 392 Thlr. Wie viel sind der Personen gewesen?

179.

Einige Kaufleute haben zusammen ein Kapital von 8240 Thlr. Dazu legt ein Jeder noch 40mal so viel Thaler, als der Personen sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Prozent, als der Personen sind. Hierauf theilen sie den Gewinn, und da findet es sich, nachdem ein Jeder zehnmal so viel Thaler genommen, als ihrer sind, so bleiben noch 224 Thlr. übrig. Wie viel sind der Personen gewesen?

180.

Es entstand ein Streit zwischen zwo Schwestern, die Eine behauptete, die Andere sey zu jung, die Andere behauptete, die Erste sey zu alt zum Heirathen. Der erwählte Schiedsrichter fragte, wie alt die älteste sey? Sie antwortete: Wenn ich die Zahl meiner Jahre quadrire, und zu dem Produkte mein Alter nebst noch 100 Jahren addire, so kommt die Jahrzahl meines Geburtsjahrs. Die jüngere erklärte sich: Wenn ich die Zahl meiner Jahre kubire, und davon das Quadrat der Jahre meines Alters subtrahire, und zu solcher Differenz 380 addire, so kommt die Jahrszahl, worin ich gebohren bin, zweimal genommen. Und wenn die Jahrszahl der Geburt meiner Schwester von der Jahrszahl meiner Geburt abgezogen wird, und der Rest wird dann noch um 10 Jahre vermindert, so kommt die Summe meiner Lebensjahre. Wie alt ist nun jede dieser beiden Schwestern gewesen?

VII.

Höhere Gleichungen.

181.

Eine Mauer ist $3\frac{1}{2}$mal so hoch als dick, und 5mal so lang als hoch. Jeder Kubikfuß kostet so viel Thaler, als die Dicke Fuß hat, und die ganze Mauer kostet 980 Thlr. Wie dick, lang und hoch ist die Mauer?

182.

Es hatte Jemand ein großes, mit starkem Eisen belegtes Faß, worin viel Eimer Wein giengen. Wenn man von ihrem Quadrate 8025 subtrahiret, wie auch zu solchem Quadrate gleich so viel addiret, und das Collect mit dem Rest multipliziret, so kommen 41987200000. Wie viel Eimer hielt demnach gedachtes Faß?

183.

Es hat Jemand einige Arbeitsleute, welche Jeder täglich so viel Groschen bekommen, als ihrer sind, und so viel Tage arbeiten, als sie insgesammt täglich Groschen bekommen, weniger einen Tag, und diese Zeit über insgesammt 180 Thlr. verdienen, den Thlr. zu 36 Gr. gerechnet. Wie viel sind es Arbeitsleute gewesen, und wie lange haben sie gearbeitet?

184.

Man soll zwei Zahlen finden, deren Produkt 36 ist, und die Summe der Quadrate multipliziret mit der Summe der Zahlen 1261 bringet. Welches sind die Zahlen?

185.

Vier Personen haben eine ungleiche Summe Geldes in ihren Beuteln. B hat 1 Thlr. mehr als A, C hat 1 Thlr. mehr als B, und D hat 1 Thlr. mehr als C. Aller Geld mit einander multipliziret, weniger 176, bringt eine Quadratzahl, deren Wurzel die Hälfte der subtrahirten Zahl ist. Wie viel hat Jeder im Beutel?

186.

Ich habe zwei Zahlen, deren Summe ist 63. Die größte durch die kleinste getheilt, das Kommende wieder mit der größten multipliziret, zu dem Produkte $20\frac{1}{4}$ addiret, dies bringt eine Kubikzahl, deren Wurzel eins weniger ist, als der siebente Theil von der größten Zahl. Welches sind die Zahlen?

VIII.

Unbestimmte Gleichungen.

Anmerk. Auch diese Aufgaben werden, zu Ersparung des Raums, ohne Auflösung mitgetheilt, da dieselben eigentlich gar nicht zum Zwecke der gegenwärtigen Abhandlung gehören.

187.

Unter zwei Familien, wovon die eine aus sieben, und die andere aus eilf Personen besteht, sollen 100 Thlr. so vertheilt werden, daß jede Person in einer Familie eine gleiche Anzahl voller Thaler bekommt. Wie viel wird in jeder Familie vertheilt werden müssen?

188.

Eine Bauerfrau hatte Eier, und wurde gefragt, wie viel derselben wären? Sie gab zur Antwort: Sie hätte die Eier bei halben Dutzenden, bei halben Stiegen, bei Dutzenden, bei Mandeln, bei Stiegen und bei Schocken gezählet, aber allemal wären 5 übrig geblieben. Wie viel sind der Eier gewesen?

189.

Wenn ein Knabe seinen Vorrath von Nüssen abzählt bei 2, so restirt 1; zählt er bei 3, so restiren 2; bei 4,

so restiren 3; bei 5, so restiren 4; bei 6, so restiren 5. Wie viel Nüsse muß er also haben?

190.

Ein Offizier hat etliche Soldaten, wenn er 5 in jedes Glied stellet, so bleibt einer übrig; nimmt er 7, so bleiben 6; nimmt er 8, so bleibt 1; nimmt er 9, so bleiben 5; nimmt er 11, so bleiben 8. Wie viel waren der Soldaten?

191.

Ein glücklicher Spieler zählt eine Summe gewonnener Dukaten nach, zählt er sie bei 3, 9 und 11, so bleibt immer 1 übrig; zählt er sie bei 7, so bleiben 2; zählt er sie bei 12, so bleiben 4 übrig. Wie stark ist nun die Anzahl der Dukaten?

192.

Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste spricht: Wenn ich die meinigen bei 8 zähle, so bleiben 7 übrig; die andere spricht: Wenn ich die meinigen bei 10 zähle, so bleiben auch 7 übrig. Wie viel hat Jede gehabt?

193.

Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividiret 2 übrig lasse; durch 13 aber dividiret, 3 übrig lasse. Welche wird es seyn?

194.

Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen, zusammen für 1770 Thlr.; bezahlt für ein Pferd 31 Thlr., für einen Ochsen 21 Thlr. Wie viel sind es Pferde und Ochsen?

195.

Theile 120 in drei solche Theile, wenn man den einen Theil mit 6, den andern mit 5, den dritten mit 4 multipliziret, und die Produkte addiret, daß alsdann 560 kommen. Welches sind die Zahlen?

196.

Hundert sollen folgendermaßen in vier Theile getheilt werden, daß wenn der erste Theil mit 9, der andere mit 7, der dritte mit 5, der vierte mit 3 multipliziret wird, die ganze Summe alsdann 702 ausmache. Es wird gefragt, welches diese vier Theile seyn müssen?

197.

Ein Bauer geht mit 100 Thlrn. zu Markte, dafür will er 100 Stück Vieh, nämlich Kühe, Schaafe und Schweine kaufen. Der Preis von einer Kuh ist 10 Thlr., von einem Schweine 3 Thlr., von einem Schaafe ½ Thlr. Wie viel hat er von jeder Sorte bekommen?

198.

Dreißig Stück Vieh kosten 30 Thlr., nämlich ein Schwein 3 Thlr., ein Kalb 1 Thlr. und eine Gans ¼ Thlr. Wie viel Stück sind von jeder Art angekauft?

199.

Eine Bauerfrau hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, 140 Stück, verkauft, jede Gans um 10 Gr., jedes Huhn um 6 Gr., jede Ente um 4 Gr., jede Taube um 2 Gr., und insgesammt 26 Thlr. 24 Gr. gelöset. Wie viel Stücke hatte sie von jeder Art?

200.

Zwanzig Personen, Männer, Frauen und Jungfrauen, haben verzehrt 2 Thlr.; jeder Mann gab 6 Gr., jede Frau gab 2 Gr. 4 Pf., jede Jungfrau gab 1 Gr. 4 Pf. Wie viel Männer, Frauen und Jungfrauen sind bei einander gewesen?

201.

Ein Münzmeister hatte einige Stück Silber, jedes 1 Mark schwer am Gewichte. Einige sind 14löthig, andere 11löthig, noch andere 9löthig. Nun soll er eine Masse, 3 Mark schwer, verarbeiten, die 12löthig ist. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

202.

Fünf Taschenuhren werden auf folgende Art tariret: Man legt einen diamantnen Ring auf die erste Uhr, dann ist der Werth derselben gegen die andere wie 2 zu 1; auf die zweite gegen die dritte wie 5 zu 2; auf die dritte gegen die vierte wie 4 zu 1; auf die vierte gegen die fünfte wie 5 zu 8. Nun ist die Frage, wie viel ist der Ring werth, und was gilt jede Uhr?

203.

Man suche eine Zahl, die durch 39 dividirt 16 übrig läßt, und durch 56 dividirt 27 übrig läßt. Welches wird die Zahl seyn?

204.

Einer kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 31 Thaler, für einen Ochsen aber 20 Thlr.; und es findet sich, daß die Ochsen insgesammt 7 Thlr. mehr

gekostet haben, als die Pferde. Wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

205.

Vier Knaben suchen Haselnüsse, und da sie zu Hause gehen, finden sie, daß der Eine weit mehr gepflückt, als der Andere. Sie entschließen sich also zur Mittheilung, doch so, daß der, welcher die meisten hat, jedem Andern so viel geben soll, als er eben hat. Nachdem das ein Jeder gethan, finden sie die Nüsse gleich getheilet. Wie viel hat nun Jeder anfangs gehabt, und wie viel hat Jeder zulezt erhalten?

206.

Fünf Soldaten, A, B, C, D, E, machen Beute, Jeder so viel er kann. Da aber einige sehr wenig bekommen, werden dieselben hernach unwillig, daher erbietet sich E, der das meiste bekommen, Jedem so viel zu geben, als er schon hat, mit der Bedingung, daß die Andern hernach ein Gleiches thun sollen. Darauf findet sich, daß die Beute gleich vertheilet ist. Wie viel Thaler hat nun Jeder anfangs erbeutet, und zulezt behalten?

207.

Einer hat drei Sorten Wein, vom beßten kostet das Stübchen 24 Ggr., vom zweiten 18 Ggr., vom dritten 12 Ggr. Er will diese Sorten so vermischen, daß er das Stübchen für 15 Ggr. geben könne. Wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

IX.

Vermischte Exempel.

208.

Ein Fleischer kauft eine Anzahl Ochsen. Die Hälfte giebt er in die Waide, $\frac{1}{3}$ derselben in die Fütterung, $\frac{1}{12}$ derselben zum Schlachten, den Rest verkauft er, jeden Ochsen für so viele Thaler, als er Ochsen verkauft. Daraus erlöset er so viel Thaler, als er anfangs Ochsen kaufte. Wie viel hat er gekauft? Antwort: 144.

209.

Es kauft Jemand für 464 Thlr. Ochsen und Kühe. Einen Ochsen zu 24 Thlr. und eine Kuh zu 16 Thlr. Wie viel waren es von jeder Gattung? Antwort: 18 Ochsen und 2 Kühe. V. 194. Aufg.

210.

Bei jeder Taschenuhr stehen der Stunden und Minutenzeiger Mittags um 12 Uhr gerade übereinander? Wie bald und wie oft werden beide Zeiger innerhalb 12 Stunden wieder gerade übereinander stehen?

Auflösung:

Der Stundenzeiger macht in 1 Stunde den Raum von 5 auf der Uhr abgetheilten Minuten: der Minutenzeiger in derselben Zeit den ganzen Umkreis oder 5.12,

d. i. 60 Minuten. Ihre Wege in gleichen Zeiten verhalten sich also wie 1 : 12. Wenn sie nun nach 12 Uhr mit einander zu laufen anfangen, und der Stundenzeiger, bis er wieder von dem andern gedeckt wird, x Minuten läuft, so muß dieser, der Minutenzeiger, der ihm in der ersten Secunde schon vorgeeilt war, in eben dieser Zeit nicht nur den ganzen Umkreis, sondern auch noch die x Minuten, um die jener inzwischen vorrückte, zurücklegen. Sein Weg ist also 60 + x. Da sich nun beider Wege wie 1 : 12 verhalten müssen, so haben wir $x : 60 + x = 1 : 12$, woraus $x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ Minuten folgt; das heißt, da 5 Minuten, als Raum auf der Uhrtafel betrachtet, mit 1 Uhr korrespondiren, dieß wird $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 1 Uhr geschehen. So wie nun, von 12 Uhr an gerechnet, dieses Decken beider Zeiger um $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 1 Uhr erstmals geschiehet, so wird es auch, von $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 1 Uhr an gerechnet, nach Verfluß von 1 Stunde und $5\frac{5}{11}$ Minuten, das ist, um $10\frac{10}{11}$ Minuten nach 2 Uhr zum zweitenmal geschehen, u. s. w. bis nach 11 dergleichen Zusammentreffungen die Zeiger um 12 Uhr wieder, wie anfangs, übereinanderstehen.

211.

Man verlangt eine Zahl von folgender Art: Wenn von derselben 120 subtrahiret, oder 482 dazu addiret werden, daß sowohl der Rest, als die Summe Kubikzahlen gebe, deren Wurzeln um 2 unterschieden sind. Welches ist diese Zahl? Antw. 849.

Die Auflösung ist wie die der 159. Aufgabe.

212.

Zwei Läufer erbieten sich, 40 Meilen, der eine in 24, der andere in 30 Stunden zu laufen. Nun geht Jeder von seinem Orte zu einerlei Zeit aus, gegen den andern Ort. Wie bald werden sie sich begegnen, und wie weit von jedem Orte?

Auflösung:

A macht in 24 Stunden 40 Meilen, also in 1 Stunde $\frac{5}{3}$ Meilen; B macht in 30 Stunden 40 Meilen, also in 1 Stunde $\frac{4}{3}$ Meile. Mithin machen A und B zusammen in 1 Stunde $\frac{9}{3}$, oder 3 Meilen. Sie sollen aber zusammen 40 Meilen machen, und brauchen daher $\frac{40}{3}$ oder $13\frac{1}{3}$ Stunden dazu. Das übrige ergiebt sich von selbst.

213.

Zu einem Geschäfte werden 3 Arbeiter gedungen. A bekommt täglich 8 Gr. B 7 Gr. C 6 Gr. Sie haben überall 146 Tagelohn verdienet, und zulezt bekommt einer so viel als der andere. Wie viel Tage hat Jeder gearbeitet?

Auflösung:

Es sey der Verdienst eines Jeden 6, 7, 8x Gr., so ist das übrige leicht zu berechnen.

214.

Es hat Jemand 2 Arbeiter, die um gleichen Tagelohn arbeiten. A empfieng für 51 Tage 12 Himten Rocken und 2 Thlr. 21 Gr. B aber für 63 Tage 18 Himten Rocken und 1 Thlr. 9 Gr. Wie hoch ist der Himten Rocken gerechnet? Antwort: 22 Gr.

Auflösung:

Man kann den Preis von 1 Himten Rocken x Gr. annehmen, und dann alles sehr leicht berechnen. Man kann aber auch nach Art der 101. und 102. Auflösung verfahren, und ohne Algebra das verlangte ausrechnen.

215.

Es dinget Jemand einen Arbeiter auf 84 Tage, und verspricht ihm die Kost, und täglich, wenn er arbeitet, 9 Gr.; arbeitet er aber nicht, so soll ihm der Arbeiter täglich 3 Gr. für die Kost bezahlen. Als sie nach verflossener Zeit mit einander abrechneten, fand sich's, daß keiner dem andern etwas schuldig war. Wie viel Tage hat er gearbeitet?

Auflösung:

Da der Lohn für einen Arbeitstag 9 Gr. und die Strafe für einen Nichtarbeitstag 3 Gr. beträgt, jener also 3mal größer ist, als diese, beide aber sich wechselseitig aufheben, so müssen dagegen wieder der Nichtarbeitstage 3mal mehr seyn, als der Arbeitstage. Wenn man also sämmtliche 84 Tage in 4 gleiche Theile theilet, so ist einer dieser Theile die Anzahl der Arbeitstage, und die übrigen 3 Theile die Anzahl der Nichtarbeitstage. Nun ist aber der vierte Theil von 84 gleich 21. Mithin hat der Arbeiter für 21 Tage den bedungenen Lohn erhalten, und 63 Tage, an denen er nichts arbeitete, Kost bezahlen müssen.

216.

Ein Hirte hatte eine große Heerde Schaafe, deren Anzahl er also bestimmte: Wenn sie zu 5 und 5 in

einer Reihe gehen, so bleiben zulezt 2 übrig; gehen 6 in einer Reihe, so bleiben 3 übrig; gehen 7, so bleiben 4, gehen 8, so bleiben 5, gehen 9, so bleibt keines übrig. Wie viel waren es Schaafe? Antw. 837.

Die Auflösung ist wie die der 189. und 190. Aufg.

217.

Ich habe eine arithmetische und eine geometrische Progression, jede von 3 Gliedern, und die Summe aller Zahlen beträgt 96. Die erste Zahl der arithmetischen ist in der ersten der geometrischen 2mal enthalten; die zweite der arithmetischen in der zweiten der geometrischen 3mal; und endlich die dritte der arithmetischen in der dritten der geometrischen 6mal enthalten. Welches sind die Progressionen?

Auflösung:

Die geometrische Progression sey: $2x$, $2xy$, $2xy^2$, so sind die Glieder der arithmetischen: x, $\frac{2xy}{3}$, $\frac{xy^2}{3}$. Sollen nun die 3 Zahlen der untern Reihe wirklich in arithmetischer Progression stehen; so muß die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten, mittleren, oder:

$$x + \frac{xy^2}{3} = \frac{4xy}{3} \text{ seyn.}$$

Man dividire durchgängig mit x, so ist auch $y^2 - 4y + 4 = 1$. Aber $y^2 - 4y + 4$ ist das Quadrat von $y - 2$. Folglich ist auch $y - 2 = \pm 1$, und also y entweder $= 3$ oder $= 1$. Nun ist noch die Bedingung zu erfüllen, daß die Summe aller Zahlen beider Progressionen 96 beträgt. Man hat also $2x + 2xy +$

$2xy^2 + x + \frac{2xy}{3} + \frac{xy^2}{3} = 96$. Nimmt man $y = 3$, so findet sich $x = 3$, und die Progressionen sind 6, 18, 54,
3, 6, 9;
nimmt man aber $y = 1$, so ist $x = 12$, und die Progressionen sind 24, 24, 24,
12, 8, 4.

218.

Man verlangt von etlichen Löppen Garn 100 Ellen Leinwand. Der Weber sagt, es wären 20 Löppen zu wenig. Man will daher nur 80 Ellen haben; da bleiben aber 12 Löppen übrig. Wie viel Löppen waren es?

Auflösung:

Indem man anstatt 100 Ellen Leinwand nur 80 Ellen will, verlangt man also 20 Ellen weniger, und macht dadurch eine Ersparniß von so vielmal 20 Löppen, als Löppen zu einer Elle erfordert werden. Von einer andern Seite betrachtet, erspart man aber auch 20 und 12, oder 32 Löppen. Mithin 20mal so viel Löppen, als Löppen auf 1 Elle erfordert werden, betragen 32. Folglich werden zu einer Elle $1\frac{3}{5}$ Löppen erfordert. Zu 100 Ellen braucht man also 100mal $1\frac{3}{5}$ oder 160, und da man 20 mehr braucht, als man hat, so hat man demnach 140 Löppen.

219.

Ein Bettler hat einige Groschen, erbettelt eben so viel dazu, und kauft nun für 4 Gr. Brod. Des andern Tages erbettelt er wieder so viel, als er noch hatte,

und kauft nun für 8 Gr. Fleisch. Am dritten Tage erbettelt er nochmals eben so viel, als sein Rest war, und trinkt nun für 8 Gr. Wein; damit war aber sein Geld ausgegeben. Wie viel hatte er anfangs?

Die Auflösung wird, als sehr leicht, übergangen.

220.

Zwei Hauptleute ließen unter ihre Soldaten, jeder 1200 Gulden Beute austheilen. Der lezte hatte 40 Mann weniger, als der erste, und daher bekam auch jeder seiner Soldaten 5 Gulden mehr, als einer der ersten. Wie viel Soldaten hatte jeder Hauptmann, und was bekam ein Jeder?

Auflösung:

Der erste Hauptmann habe gehabt $x + 20$ Mann, so hatte der andere $x - 20$. Da nun jeder Hauptmann unter seine Leute 1200 Gulden austheilt, so bekommt 1 Mann der ersteren $\frac{1200}{x + 20}$, nnd einer der zweiten $\frac{1200}{x - 20}$. Diese leztere Summe soll nun um 5 Gulden mehr betragen, als die erste; daher ist: $\frac{1200}{x - 20} - \frac{1200}{x + 20} = 5$ oder $240 \left(\frac{1}{x - 20} - \frac{1}{x + 20}\right) = 1$, woraus $x = 100$ folgt. Das übrige ist leicht zu berechnen.

221.

Fünf Studenten lassen sich traktiren, es hat aber keiner so viel Geld, daß er allein bezahlen kann. Da sagt nun der erste zu den 4 andern: Gebt mir $\frac{1}{5}$ von

euerm Gelde zu dem meinigen, so will ich allein bezahlen. Der zweite sagt: Hätte ich $\frac{1}{7}$ von euerm Gelde zu meinem, so wollte ich die Bezahlung allein übernehmen. Der dritte sagt: Überlaßt mir $\frac{1}{9}$ von euerm Gelde, so bezahle ich allein. Der vierte sagt: Wenn ich $\frac{1}{11}$ von euerm Gelde zu dem meinigen bekomme, so leiste ich die Zahlung. Endlich sagt der fünfte: Ich verlange nur $\frac{1}{13}$ von euerm Gelde, um die Bezahlung allein zu übernehmen. Nun ist die Frage, wie viel Geld ein Jeder gehabt, und wie viel sie verzehrt haben?

Auflösung:

Gesetzt, A, B, C, D, E haben gehabt x, y, z, p, q; ferner sey das, was sie zusammen verzehrten, $= X$, und $x + y + z + p + q = S$; so enthält die Aufgabe folgende Bestimmungen:

$$x + \frac{1}{5}(S - x) = X,$$
$$y + \frac{1}{7}(S - y) = X,$$
$$z + \frac{1}{9}(S - z) = X,$$
$$p + \frac{1}{11}(S - p) = X,$$
$$q + \frac{1}{13}(S - q) = X,$$

daher ist $x = \frac{5X - S}{4}$, $y = \frac{7X - S}{6}$, $z = \frac{9X - S}{8}$, $p = \frac{11X - S}{10}$, $q = \frac{13X - S}{12}$; mithin $x + y + z + p + q$, d. i. $S = \frac{5X - S}{4} + \frac{7X - S}{6} + \frac{9X - S}{8} + \frac{11X - S}{10} + \frac{13X - S}{12}$; also

$120S = 150X - 30S + 140X - 20S + 135X - 15S + 132X - 12S + 130X - 10S$, mithin $S = \frac{687X}{207}$. Da nun in dieser Gleichung X durch nichts bestimmt wird, und mithin ganz von der Willkühr abhängt, so kann diese Größe = 207 angenommen werden: dann wird S = 687, und aus diesen beiden Werthen ergeben sich sofort x, y, z, p, q. Andere Werthe für diese Größen erhielte man, wenn man X = 2.207, 3.207 ꝛc. annähme.

222.

Sieben Diebe ergriffen einen großen Beutel mit Dukaten, und in der Eile bekam der Stärkste das Meiste, nämlich 449 Dukaten. Nun befahl der Anführer, daß der, so das Meiste erhascht hatte, Jedem der Andern seinen Werth verdoppeln müsse, doch mit der Bedingung, daß dann ferner der Reichste eben so thun müßte, bis zu dem lezten, da alles gleich getheilt seyn würde. Wie viel hat Jeder anfangs ergriffen und wie viel hernach erhalten?

Auflösung:

Diese Aufgabe kann ganz leicht, nach Ähnlichkeit der 117. und 118. aufgelös't werden. Nur ist zu bemerken, daß, da man, indem man von dem lezten bis zum ersten rückwärts aufsteigt, den Antheil eines jeden halbiren muß, zur Vermeidung der Brüche, die gleiche Zahl, die sie am Ende alle erhalten, $2^7.a$ oder 128a angenommen werden muß, wo a ganz willkührlich ist. Die Summe, die sie alle haben, ist sodann 7.128a, die man S nennen kann. Das übrige aber ergiebt sich von selbst.

223.

Ein Kaufmann will ein Stück Tuch zu 36 Ellen für 120 Thlr. verkaufen. Der Käufer dinget vom Ganzen so viel ab, als er hernach für 4 Ellen wirklich bezahlt. Wie viel giebt er für das Stück?

Auflösung:

Vom ganzen Preis werden so viel Thaler abgedungen, als 4 Ellen werth sind. Nun sind 4 Ellen der neunte Theil von den vorhandenen 36 Ellen; mithin ist auch der abgedungene Preis $\frac{1}{9}$ des ganzen Preises. Es ist also der ganze Preis und $\frac{1}{9}$ desselben, d. i. $\frac{10}{9}$ des ganzen Preises der Werth des ganzen Stücks, nämlich 120 Thlr. Daher muß $\frac{1}{9}$ des Preises 12 Thaler, und also der Preis selbst 9.12 oder 108 Thlr. betragen.

224.

Ein Rechenmeister gab seinem Schüler 2 Zahlen zu multipliziren, von welchen die eine um 75 größer war, als die andere. Nach verrichteter Multiplikation mußte der Schüler die Probe machen, und das Produkt mit dem kleineren Faktor dividiren. Der Quotient war 227 und der Überrest 113. Der Lehrmeister fand nun, daß falsch multiplizirt worden war, und befahl, den Fehler zu verbessern. Als der Schüler den Fehler gefunden hatte, sagte er, er hätte im Multipliziren nur Einen ausgelassen. Nein, erwiederte der Lehrer, nicht 1, sondern 1000. Welche Zahlen hatte also der Schüler mit einander multipliziret?

Auflösung:

Wenn x der kleinere Faktor ist, so ist der größere $x + 75$, das Produkt derselben aber $x(x + 75)$, und das falsche Produkt $x(x + 75) - 1000$. Dieß wurde nun mit dem kleinen Faktor dividirt, und da fand sich der Quotient 227, und Überrest 113. Wenn man also den Quotienten mit dem Divisor x multipliziret, und zum Produkt den Rest 113 addiret, so erhält man jenes obige falsche Produkt wieder: daher ist $x(x + 75) - 1000 = 227x + 113$, woraus $x = 159$ gefunden wird.

225.

Ein Schüler hat 2 Bücher gekauft, und zwar beide zusammen für 2 Thlr. 3 Gr. Wenn man aber die Pfenninge, so das erste unter einem Thlr. kostet, mit der Differenz des Preises beider Bücher multipliziret, so ist das Produkt 13376. Was hat jedes Buch besonders gekostet?

Die Auflösung wird, als ganz gewöhnlich, übergangen. Nur wird bemerkt, daß man sowohl den Preis eines der beiden Bücher, als den Unterschied dieses Preises als die unbekannte Größe annehmen könne.

226.

Ich zapfte von einem Fasse Wein 4 Stübchen, und goß dafür so viel Wasser hinein. Von diesem vermischten Weine nahm ich wieder 4 Stübchen, und goß dafür so viel Wasser zu. Eben das that ich zum drittenmal, und fand, daß nun $2\frac{1}{2}$ Stübchen mehr Wasser, als Wein im Fasse war. Wie viel ist daher anfangs im Fasse gewesen?

Auflösung:

Es seyen im Fasse x Stübchen gewesen, und um die Auflösung allgemeiner zu machen, nehme man an, man habe jedesmal anstatt 4 Stübchen, m Stübchen herausgenommen, und eben so viel Wasser zugegossen: Nach diesen Voraussetzungen ist nun die Rechnung folgende:

Im Fasse waren x Stübchen Wein,
davon gehen ab: m Stübchen Wein,

Überrest: $x - m$ Stübchen Wein.
Hierzu kommen: m Stübchen Wasser.

Summe: x Stübchen vermischten Wein, worunter m Stübchen Wasser und $x - m$ Stübchen Wein ist. (A)
Davon gehen ab: m Stübchen dieser Mischung.

Überrest: $x - m$ Stübchen vermischten Wein, worunter nach Verhältniß (A)
$\frac{m(x-m)}{x}$ Stübchen Wasser, und
$\frac{(x-m)^2}{x}$ Stübchen Wein sind.
Hierzu kommen: m Stübchen Wasser.

Summe: x Stübchen vermischten Wein, unter denen
$\frac{m(x-m)}{x} + m$, oder $\frac{m(2x-m)}{x}$
Wasser und $x - \frac{m(2x-m)}{x}$, oder
$\frac{(x-m)^2}{x}$ Wein ist. (B)

Hiervon gehen ab: m Stübchen dieser Mischung.

Überrest: $x - m$ Stübchen vermischten Wein, worunter nach dem Verhältniß (B)

$\frac{m(2x-m)(x-m)}{x^2}$ Wasser, und

$\frac{(x-m)^3}{x^2}$ Wein.

Hierzu kommen: m Stübchen Wasser.

Summe: x Stübchen vermischten Wein, worunter: $\frac{m(2x-m)(x-m)}{x^2} + m$,

oder: $\frac{m(3x^2 - 3mx + m^2)}{x^2}$

Stübchen Wasser,

und, da kein Wein hinzu kam,

$\frac{(x-m)^3}{x^2}$ Wein ist.

Nun findet sich's, daß in dem Fasse n Stübchen mehr Wasser, als Wein sind; daher haben wir:

$$\frac{m(3x^2 - 3mx + m^2)}{x^2} = \frac{(x-m)^3}{x^2} + n, \text{ oder:}$$

$$3mx^2 - 3m^2x + m^3 = x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 + nx^2,$$

aus welcher kubischen Gleichung x nach den bekannten Regeln gefunden wird. Für $m = 4$, und $n = 2\frac{1}{2}$ ergiebt sich $x = 16$. Für $m = 0$ ist $x = n$, wie es auch seyn muß.

227.

Einer hat 2 Säcke gleicher Länge, aber ungleicher Weite. Der erste faßt 4 Himten, der andere 9 Himten

Korn. Wenn nun beide Säcke der Länge nach aufgeschnitten, und daraus ein Sack von voriger Länge gemacht wird. Wie viel Himten können alsdann hinein gethan werden?

Auflösung:

Die Säcke seyen bezeichnet mit A und B, und der aus ihnen verfertigte heiße C. Ihre respektiven Durchmesser seyen D, d und D + d. *) Nun verhalten sich cylindrische Körper von gleicher Länge, dergleichen diese Säcke sind, wie ihre Grundflächen oder Durchschnitte, und diese, als Zirkel, wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Also ist $C : B = (D + d)^2 : d^2$, folglich $C = B \frac{(D^2 + 2Dd + d^2)}{d^2} = \frac{BD^2}{d^2} + 2\frac{BD}{d} + B$. Es ist aber aus eben der Ursache $A : B = D^2 : d^2$, also $= \frac{D^2}{d^2} = \frac{A}{B}$, $\frac{D}{d} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$, daher haben wir: $C = B.\frac{A}{B} + 2B.\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} + B$ oder $C = A + B + 2\sqrt{AB}$.

Diese Formel bietet uns eine allgemeine Regel zur Ausrechnung eines aus 2 gleich langen Säcken zusammengesetzten dritten Sacks dar. In dem Fall des gegenwärtigen Beispiels ist $A = 9$, und $B = 4$, also $C = 9 + 4 + 2\sqrt{36} = 13 + 12 = 25$.

*) Anmerk. Man hat den Durchmesser des dritten Sacks D + d gesetzt, denn dieser Sack wird aus den beiden andern zusammengesetzt; seine Peripherie ist die Summe der Peripherien jener beiden, mithin, wie die Geometrie lehrt, auch sein Durchmesser die Summe der Durchmesser von denselben.

228.

Aus 2 Säcken von gleicher Länge, wovon ein jeder $2\frac{1}{2}$ Himten fassen kann, soll ein Sack gemacht werden. Wie viel Himten können nun darin bleiben?

Auflösung:

Diese Aufgabe ist durch die vorhergehende bereits aufgelöset: denn da $C = A + B + 2\sqrt{AB}$; in diesem Falle aber $A = B = 2\frac{1}{2}$ ist, so hat man $C = 10$, und der aus jenen beiden zusammengesetzte Sack faßt demnach 10 Himten.

229.

Ein Kaufmann will gern für 100 Thlr. Safran, Zimmt, Thee und Kaffee einkaufen, doch so, daß er überall 100 Pfunde bekomme. Nun kostet ein Pfund Safran 10 Thlr., ein Pfund Zimmt 5 Thlr., ein Pf. Thee 2 Thlr. und ein Pfund Kaffee $\frac{1}{2}$ Thlr. Wie viel Pfunde wird er von jeder Gattung bekommen? Antw. 1 Pf. Safran, 3 Pf. Zimmt, 18 Pf. Thee und 78 Pf. Kaffee.

Die Auflösung ist wie die der 197. 198. 199. Aufgabe.

230.

Ein Sohn wollte das Alter seines Vaters wissen, und bekam folgende Antwort: Auf der Spitze meines Hauses stehet eine große Kugel, deren Umkreis sich zu ihrem Diameter wie 22 zu 7 verhält, und deren Inhalt überhaupt $11498\frac{2}{3}$ Kubikzolle beträgt. Der Diameter der Kugel verhält sich zu meinem jetzigen Alter wie 7 zu 13. Wie alt war nun der Vater? Antw. 52 Jahre.

Auflösung:

Für diejenigen, die Geometrie verstehen, ist die Auflösung dieser Aufgabe leicht. Den andern kann sie nie verständlich gemacht werden. Folgendes Verfahren scheint das kürzeste zu seyn. Bei dem angenommenen Verhältniß des Diameters zur Peripherie ist für den Diameter 2x der Inhalt der Kugel $\frac{4 \cdot 22 x^3}{3 \cdot 7}$. Dieser ist aber auch $\frac{34496}{3}$. Daher sind diese 2 Ausdrücke gleich, und x ist = 14. Also der gesuchte Diameter = 28. Dieser verhält sich aber zu dem Alter des Vaters wie 7 : 13. Daher des Vaters Alter = 52 Jahre ist.

231.

Ein Landwirth wird von seinem mathematischen Freund aus der Stadt besucht, und da sie im Felde spazieren, finden sie eine Art Getraide, das der Städter nicht kennt; auf seine Frage erhält er aber folgende Antwort: Ich gebe Ihnen 4 Zahlen. Wenn Sie dieselben deutsch aussprechen, und von jeder Zahl den ersten Buchstaben nehmen, so haben Sie den Namen dieser Fruchtart. Diese 4 Zahlen bestimme ich Ihnen auf folgende Weise: Wenn ich das Quadrat der ersten durch sich selbst multiplizire, und addire dazu 599, so kommen 3000. Addire ich zur zweiten Zahl $\frac{1}{6}$, so bekomme ich eine Zahl von der Eigenschaft, daß, wenn ich 7 dazu thue, oder sie mit 7 multiplizire, Summe und Produkt gleich sind. Die

dritte Zahl kann ich leicht finden, wenn ich eine gewisse Zahl annehme, sie mit 10000 multiplizire, aus dem Produkt die Quadratwurzel ziehe, diese Wurzel dann mit 100 dividire, und den Quotienten mit 3 multiplizire, worauf ich sodann die angenommene Zahl, welche eben jene dritte ist, wieder erhalte. Die vierte Zahl ist das erste Glied einer geometrischen Progression von 3 Zahlen, deren Summe 35, und Produkt 1000 ist. Welches wird nun die Fruchtart seyn? Antw. 7, 1, 9, 5.

Anmerk. Die Auflösung dieser aus 4 sehr leichten Fragen bestehenden Aufgabe, bei der durchaus nichts anzumerken ist, wird hier übergangen.

Anhang.

232.

Ein Mann hat 6 Söhne, von denen 5 jeder 4 Jahre älter ist, als sein nächst vorhergehender Bruder, und der älteste ist 3mal so alt, als der jüngste. Wie alt war also der jüngste? Antw. 10 Jahre.

Anmerk. Man nehme zuerst das Alter des jüngsten als die unbekannte Größe; sodann zur Übung auch das des ältesten, und eines jeden der vier andern.

233.

Wie alt bist du? fragte ein Sohn seinen Vater. Die Antwort war: Es sind schon 7 Jahre, da ich gerade 3mal so alt war, als du damals warst, und in 7 Jahren werde ich doppelt so alt seyn, als du alsdann seyn wirst. Wie alt war der Vater? Antwort: 49 Jahre.

Anmerk. Man kann das jetzige Alter des Vaters als die unbekannte Größe annehmen: oder zur Übung auch das von 7 Jahren, oder das nach 7 Jahren.

234.

In einer zahlreichen Gesellschaft waren 3mal so viel Männer, als Frauen; und da 4 Männer mit ihren

Frauen weggiengen, blieben noch 4mal so viel Männer, als Frauen. Wie stark war die Gesellschaft? Antwort: 48 Personen.

Auflösung:

Unter mehreren Annahmen der unbekannten Größe, die man theils mit den Männern, theils mit den Frauen versuchen kann, scheint diese die einfachste. Da 4 Frauen mit ihren Männern weggehen sollen, so sey die Zahl der anwesenden Frauen $x + 4$, so ist die der Männer 3mal mehr, also $3x + 12$ Gehen 4 Männer mit ihren Weibern fort, so bleiben $2x + 8$ Männer und x Weiber. Jene sind 4mal mehr, als diese, also ist $2x + 8 = 4x$, und $x = 8$.

Anders: Man nenne je einen Mann und eine Frau zusammen: ein Paar, einen Mann aber, dem keine Frau beigegeben werden kann, einen einzelnen Mann. Nun sind anfänglich 3mal mehr Männer als Frauen vorhanden. Die Anzahl aller vorhandenen Personen besteht also aus 4 Theilen. $\frac{1}{4}$ derselben ist die Anzahl der Frauen, und $\frac{3}{4}$ derselben die Anzahl aller Männer. Mithin sind unter dieser anfänglichen Anzahl aller Personen die Hälfte derselben Paare, und die Hälfte der ganzen Anzahl einzelne Männer. Es gehen aber, nach der Bedingung der Aufgabe, 4 Paare von diesen ab; folglich bleibt die Anzahl der einzelnen Männer immer noch die Hälfte der anfänglichen Anzahl Personen. Auf der andern Seite bleiben, nach dem Hinweggehen obiger 4 Paare, noch 4mal so viel Männer, als Frauen. Nennt man diese zusammen den Überrest, so ist die Anzahl der Frauen $\frac{1}{5}$ dieses Überrests, und die der Männer

$\frac{4}{5}$ desselben. Folglich ist die Anzahl der Paare $\frac{2}{5}$ dieses Überrests, und die der einzelnen Männer $\frac{3}{5}$ desselben. Nun ist eben diese Anzahl der einzelnen Männer auch $\frac{1}{2}$ der ganzen Zahl anfänglicher Personen; also ist $\frac{1}{2}$ der ganzen Anzahl der anfänglichen Personen gleich $\frac{3}{5}$ des Überrests; $\frac{1}{5}$ dieses Überrests ist mithin $\frac{1}{6}$, und der Überrest selbst $\frac{5}{6}$ der Anzahl der anfänglichen Personen. Demnach beträgt der Abgang $\frac{1}{6}$ des Ganzen. Eben dieser Abgang besteht aber auch aus 4 Paaren oder 8 Personen, folglich ist $\frac{1}{6}$ dieser anfänglichen Anzahl aller Personen gleich 8, und die anfängliche Anzahl also 6.8 oder 48 Personen.

235.

Ein Gärtner hatte eine Parthie Äpfel gepflückt, und schenkte dem ersten Freunde, der ihm begegnete, den dritten Theil, weniger 11, dem zweiten wieder den dritten Theil der übrigen, weniger 11, und dem dritten abermals den dritten Theil der übrigen, weniger 11. Nun hatte er gerade die Hälfte seines Vorraths verschenkt. Wie groß war dieser Vorrath? Antw. 144 Stücke.

Auflösung:

Man nehme an, derselbe sey gewesen $27x + 33$, so ist die Auflösung ganz leicht.

236.

Drei nasse Brüder bearbeiten ein Fäßchen von 15 Stübchen. A behauptet, er könne es in 30 Stunden allein austrinken; B will dieß in 20 und C in 12 Stun-

den leisten. Wenn sie sich nun alle drei zugleich daran machen, wie bald wird dasselbe leer?

Anmerk. Diese Aufgabe wird durch die gewöhnliche Rechenkunst also aufgelöset:

A trinkt in 30 Stunden 15 Stübchen, also in 1 Stunde: $\frac{15}{30}$ oder $\frac{2}{4}$ Stübchen;

B trinkt in 20 Stunden 15 Stübchen, also in 1 Stunde: $\frac{15}{20}$ oder $\frac{3}{4}$ Stübchen;

C trinkt in 12 Stunden 15 Stübchen, also in 1 Stunde: $\frac{5}{4}$ Stübchen.

Also trinken A, B, C zusammen in 1 Stunde $\frac{10}{4}$ oder $2\frac{1}{2}$ Stübchen. Wenn sie nun zu $2\frac{1}{2}$ Stübchen 1 Stunde brauchen, so werden sie zu 15 Stübchen, d. i. zu 6mal mehr, auch 6mal mehr Zeit, mithin 6 Stunden nöthig haben.

237.

Man soll 90 in zwei ungleiche Theile theilen, die von der Art sind, daß wenn der größere durch 2 dividirt, und der kleinere durch 2 multiplizirt wird, Quotient und Produkt zusammen wieder 90 ausmachen. Welches sind diese Zahlen?

Auflösung:

Die Hälfte des größeren Theils, und der doppelte kleine zusammengenommen, sind eben so viel, als die Hälfte der Summe des größeren und des vierfachen kleineren, oder als die Hälfte der Summe der Zahl 90 und der dreifachen kleineren. Also ist auch die Hälfte von 90 und die Hälfte der dreifachen kleineren Zahl,

nach der Bedingung der Aufgabe, gleich 90; daher muß die Hälfte der dreifachen kleineren Zahl gleich 45, die dreifache kleinere also 90, und die kleinere Zahl selbst 30 seyn. Die größere ist demnach 60.

238.

Es giebt einen Bruch. Wenn man 1 vom Zähler abnimmt, so wirds $\frac{1}{4}$, und wenn man 1 vom Nenner abnimmt, so wirds $\frac{1}{3}$. Welches ist dieser Bruch? Antwort: $\frac{5}{18}$.

Die algebraische Auflösung ist sehr leicht. Für diejenigen, die sich gern üben, bemerke ich noch, daß man diesen Bruch, der ersten Bedingung nach, $\frac{x+1}{4x}$, und der andern aber nach, $\frac{x+1}{3x+4}$ setzen könne, und da diese zwei Werthe gleich seyn müssen, so ergiebt sich hieraus x.

239.

Es liegt vor einem Zeughause ein Haufen Kanonenkugeln, wovon die unterste Schichte in Gestalt eines Rechtecks gelegt ist, und 10 Schichten übereinander liegen. In jeder Schichte hat jede Seite eine Kugel weniger, und oben endigt sich der Haufe mit einer Reihe Kugeln von 30 Stück. Wie viel Kugeln hält der Haufe? Antwort: 1980 Stück.

Auflösung:

Man berechne die Schichten von oben herab auf folgende Art:

Erste Schichte		1 . 30 =	30	Kugeln.
Zweite	—	2 . 31 =	62	—
Dritte	—	3 . 32 =	96	—
Vierte	—	4 . 33 =	132	—
Fünfte	—	5 . 34 =	170	—
Sechste	—	6 . 35 =	210	—
Siebente	—	7 . 36 =	252	—
Achte	—	8 . 37 =	296	—
Neunte	—	9 . 38 =	342	—
Zehnte	—	10 . 39 =	390	—
		Summe:	1980	Kugeln.

Übrigens giebt die Algebra eigene Regeln zur Berechnung jeder Gattung von regulären Haufen dergleichen Kugeln.

240.

Ich habe für Jemanden 1202 Thlr. eingenommen, die ich ihm auf der Post schicken soll. Das Postgeld beträgt $\frac{1}{6}$ Procent. Dieses soll ich an meinem Ort bezahlen, und ihm abziehen. Wie viel muß ich ihm schicken?

Auflösung:

Die gewöhnliche Rechenkunst löset diese sehr leichte Aufgabe also auf: Von 600 Thalern, die abgeschickt werden, erhält die Post 1 Thlr. Also um 600 abzuschicken, müssen 601 Thlr. auf die Post getragen werden. Daher ist:

601 : 600 = 1202 : x, wo x = 1200 Thlr. gefunden wird, wie es sich auch ohne Proportion von selbst versteht.

241.

Es hat Jemand ein Kapital, wovon er jährlich so viel erwirbt, daß er allezeit am Schlusse des Jahrs zweimal so viel hat, als er im Anfang hatte. Er giebt aber mit dem Schlusse des ersten Jahrs 800 Thlr. aus, mit dem Schlusse des zweiten 1600 Thlr., mit dem Schlusse des dritten 2400 Thlr., und nun findet sich's, daß er alles aufgezehrt hat. Wie groß ist sein Kapital anfangs gewesen? Antw. 1100 Thlr.

Die Auflösung wird, als sehr leicht, übergangen.

242.

Jemand ist schuldig, nach 3 Jahren 690 Thlr. zu bezahlen; er will aber jetzt gleich seine Schuld abtragen, und für jedes Jahr 5 Procent Zinsen zurückbehalten. Wie viel muß er bezahlen?

Auflösung:

$115 : 100 = 690 : x$, also $x = 600$ Thlr.

243.

Es soll Jemand ein Kapital von 6305 Thlrn. in 3 Jahren dergestalt bezahlen, daß in jedem Jahre die Zinse zu 5 Procent mit berichtiget, und auch jährlich eine gleiche Summe abgetragen werde. Wie viel muß er am Ende eines jeden Jahrs bezahlen? Antw. $2315\frac{1}{4}$ Thlr.

Auflösung:

Um diese Aufgabe, die für Anfänger nicht ganz leicht ist, für dieselben faßlich aufzulösen, wollen wir das abzutragende Kapital a heißen; die jährliche immer gleiche

Summe aber, die der Schuldner mit Inbegriff des verfallenen Zinses bezahlt, sey x; so ist klar, daß am Ende eines jeden Jahrs vom noch übrigen Kapital nur der Überrest der Summe x und des jedesmal verfallenen Zinses abgeht: Denn nach der Bedingung bezahlt er zwar alle Jahre gleich viel, trägt aber nicht gleich viel ab. Dieß vorausgeschickt, so ist die Rechnung folgende:

Das Kapital ist a, und sein jährlicher Zins, zu 5 von 100, ist $\frac{a}{20}$. Dieser, und die abzutragende Summe betragen zusammen die Zahl x, daher ist die abzutragende Summe des ersten Jahrs $x - \frac{a}{20}$. Folglich ist das im zweiten Jahre noch zu verzinsende Kapital $a - (x - \frac{a}{20})$ oder $\frac{21}{20}a - x$. Hiervon beträgt der Zins abermals den $\frac{1}{20}$ Theil, oder $\frac{21}{20} \cdot \frac{1}{20}a - \frac{1}{20}x$. Dieser und die im zweiten Jahre abzutragende Summe ist ebenfalls $= x$; daher die in diesem Jahre abzutragende Summe $= x - (\frac{21}{20} \cdot \frac{1}{20}a - \frac{1}{20}x)$ oder $\frac{21}{20}x - \frac{21}{20} \cdot \frac{1}{20}a$. Zieht man diese von dem noch übrigen Kapital $\frac{21}{20}a - x$ ab, so ist der Überrest $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{41}{20}x$ die im dritten Jahre zu verzinsende Summe. Der jährliche Zins hiervon ist $(\frac{21}{20})^2 \cdot \frac{1}{20}a - \frac{41}{20} \cdot \frac{1}{20}x$, und dieser beträgt mit der am Ende des dritten Jahrs abzutragenden Summe wieder x, daher diese Summe $= x + \frac{41}{20} \cdot \frac{1}{20}x - (\frac{21}{20})^2 \cdot \frac{1}{20}a$. Zieht man sie von dem noch übrigen Kapital $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{41}{20}x$ ab, so ist der Überrest:

$$(\tfrac{21}{20})^3 a - x - \tfrac{41}{20}(\tfrac{21}{20})x.$$

Dieser Überrest soll aber o seyn, weil man auf diese Art am Ende des dritten Jahrs will alles abbezahlt haben; folglich ist

$$x = \frac{(\frac{21}{20})^3 a}{1 + \frac{41 \cdot 21}{20 \cdot 20}}.$$

Für a = 6305 findet sich sodann x = $2315\frac{1}{4}$ Thlr.

244.

Ein Faß Wein wurde mit Verlust für 224 Thlr. verkauft: Wäre es aber für 260 Thlr. verkauft worden, so wäre der Gewinn 3mal so groß gewesen, als der Verlust. Wie theuer ist es eingekauft worden?

Auflösung:

Wenn etwas anstatt für 224 für 260 Thlr. verkauft wird, so beträgt der Unterschied 36 Thlr. Dieser Unterschied wäre Gewinn, wenn der wirkliche kleinste Preis der verkauften Waare 224 gewesen wäre. Da man aber bei dem Verkauf derselben um 224 verloren hätte, so muß der Einkauf größer, als 224 gewesen seyn. Es besteht also der Unterschied 36 aus Gewinn und Verlust. Nun soll der Gewinnst 3mal mehr betragen, als der Verlust. Theilt man also das Ganze, den Unterschied 36, in 4 gleiche Theile, so ist $\frac{1}{4}$ davon, nämlich 9, Verlust, und $\frac{3}{4}$ dieser Zahl, oder 27 Gewinn. Verliert man aber bei dem Verkauf einer Waare um 224 Thlr. 9 Thlr., so war der Einkauf 224 + 9 oder 233 Thlr.

245.

Man hat zwei Zahlen von der Beschaffenheit, wenn ich die eine in die andere dividire, so bekomme ich 5. Das Quadrat von beiden ist aber um 384 unterschieden. Welches sind die Zahlen?

246.

Man hat zwei Zahlen von der Beschaffenheit, wenn ich das Quadrat der größern mit der kleinern multiplizire, so bekomme ich 48, und wenn ich das Quadrat der kleinern mit der größern multiplizire, so bekomme ich 36. Welches sind die Zahlen?

247.

Man hat zwei Zahlen, wovon die eine um 5 größer ist, als die andere, und das Quadrat von beiden zusammen macht 73. Welches sind die Zahlen?

248.

Man hat zwei Zahlen von der Beschaffenheit, wenn man sie addiret, so kommen 20, und wenn man sie multipliziret, so kommen 96. Welches sind die Zahlen?

Anmerk. Diese 4 lezteren Aufgaben sind, nach der bisher gezeigten Methode, sehr leicht aufzulösen, da von jeder im vorhergehenden schon Beispiele zu finden sind.

249.

Man soll 3 Zahlen von solcher Beschaffenheit finden, wenn A mit B multipliziret wird, so kommt 4mal so viel, als die Summe der drei Zahlen; wird die erste

mit der dritten multiplizirt, so kommt 5mal so viel, als die Summe der 3 Zahlen; wird die zweite mit der dritten multiplizirt, so kommt 6mal so viel, als die Summe der 3 Zahlen. Welches sind diese Zahlen?

Auflösung:

Wenn die 3 Zahlen x, y, z heißen: so sind die 3 Bedingungen dieser Aufgabe in folgenden Gleichungen enthalten:

1) $xy = 4(x+y+z)$; 2) $xz = 5(x+y+z)$; 3) $yz = 6(x+y+z)$, deren einfachste algebraische Auflösung, wie es scheint, diese ist: Es ist $\frac{xy}{xz}$ oder $\frac{y}{z} = \frac{4}{5}$, also $y = \frac{4}{5}z$. Es ist ferner $\frac{xy}{yz}$ oder $\frac{x}{z} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, mithin $x = \frac{2}{3}z$, und daher $xy = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}z^2$. Nun ist, nach der ersten Gleichung: $xy = 4(x+y+z)$, also auch, wenn man alles in z ausdrückt, und für xy, x, y, die gefundenen Werthe setzt:

$\frac{8}{15}z^2 = 4(\frac{2}{3}z + \frac{4}{5}z + z)$, oder:

$2z = 10 + 12 + 15$, und $z = 18\frac{1}{2}$, woraus die übrigen unbekannten Größen von selbst sich ergeben.

250.

Ein Fleischer hat für 100 Thlr. gerade 100 Schaafe von dreierlei Sorten gekauft. Ein Stück von der mittleren Sorte kostet 24 Gr. 7 Pf., d. i. 199 Pf. mehr, als eins der kleineren, und die größern alle kosten 2 Thlr.

21 Gr. oder 744 Pf. weniger, als die mittlern. Wie viel Stücke hat er von jeder Sorte, und wie theuer jedes eingekauft?

Auflösung:

In dem anliegenden Schema sind die Bedingungen dieser Aufgabe nach den in Klammern eingeschlossenen Nummern am leichtesten zu übersehen:

Sorten	Anzahl der Stücke.	Preis eines Stücks	Preis aller Stücke.
Erste	(1) . . x . .	(9) $\frac{100z - yz - 744}{x} - z = p.$	(8) $100z - xz - yz - 744$ oder auch: $28800 - 100z + xz + 199y.$
Mittl.	(3) $100 - x - y$	(4) . . . z . . .	(7) $100z - xz - yz$
Kleinste	(2) . . y . .	(5) . . $z - 199$ . .	(6) $yz - 199y$

Nach diesem Schema ist nun folgendes zu leisten: Nach Nr. (8) haben wir: $100z - xz - yz - 744 = 28800 - 100z + xz + 199y$, daher ist $x = 100 - \frac{y}{2} - \frac{1}{z}\left(14772 + \frac{199y}{2}\right)$, oder wenn man $y = 2y^1$ annimmt:

$$x = 100 - y^1 - \frac{1}{z}\,(14772 + 199\,y^1).$$

Dieß ist die einzige Gleichung, der Genüge geschehen muß. Ob nun zwar gleich z und y^1 ganz der Willkühr

überlassen sind: so müssen doch diese Größen also angenommen werden, daß y und x ganze Zahlen werden, und dabei $x + y < 100$ ist. Zu dem Ende setze man für y^1 von 1 an jeden Werth unter 50, so ergiebt sich die Zahl oder Summe $14772 + 199 y^1$. Man zerlege dieselbe sodann, wenn es seyn kann, in ihre Faktoren m und n, und setze z einem derselben gleich. Ist nun der andere, z. B. n von der Beschaffenheit, daß x oder $100 - y^1 - n$, und y zusammengenommen kleiner, als 100 sind, so ist die Aufgabe durch diese Annahme von y^1 aufgelöset. Hat die Zahl $14772 + 199 y^1$ keine Faktoren, oder ist $x + y > 100$, so muß für y^1 ein anderer Werth gesetzt werden, mit welchem dieselbe Untersuchung statt hat.

Es sey z. B. $y^1 = 2$, so ist $14772 + 199 y^1 = 15170 = 10 . 1517$. Nimmt man also $z = 1517$, so ist $x = 100 - 2 - 10 = 88$, und da $y = 4$, also $y + x < 100$ ist, so giebt diese Annahme folgende Auflösung:

88 große, à $129\frac{5}{11}$ Pf.
oder 16 Gr. $1\frac{5}{11}$ Pf. kosten 39 Thlr. 20 Gr.
8 mittlere, à 1517 Pf.
od. 5 Thlr. 9 Gr. 5 Pf. kosten 42 Thlr. 5 Gr.
4 kleine, à 1318 Pf.
od. 4 Thlr. 20 Gr. 4 Pf. kosten 18 Thlr. 11 Gr.

100 Schaafe . . . . 100 Thlr.

Für $y^1 = 12$ erhält man $z = 312$, $x = 33$, $y = 24$, $100 - x - y = 43$, und folgende Bestimmungen:

33 große,	à 1 Thlr. 12 Gr.	...	44 Thlr.
43 mittlere,	à 1 Thlr. 3 Gr.	...	46 Thlr. 21 Gr.
24 kleine,	à 14 Gr. 1 Pf.	...	9 Thlr. 15 Gr.
100 Stücke.		....	100 Thlr.

Gedruckt durch Gutmann, Universitäts-Buchdrucker in Heidelberg.

Kausler, Christoph Friedrich,

Das Uflackerische Exempelbuch der Algebra

Heidelberg u.a. 1806

Math.p. 251
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082118-2